# QUADRATISCHE FORMEN UND MONODROMIEGRUPPEN VON SINGULARITÄTEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von
WOLFGANG EBELING
aus
BÜCKEBURG

BONN 1980

# QUADRATISCHE FORMEN UND MONODROMIEGRUPPEN VON SINGULARITÄTEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von
WOLFGANG EBELING
aus
BÜCKEBURG

BONN 1980

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. E. Brieskorn

2. Gutachter: Prof. Dr. F. Hirzebruch

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Juli 1980

Mathematisches Institut

Direktoren: Proff. Brieskorn; Hildebrandt; Hirzebruch;
Klingenberg; Lieb

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

## Einleitung

Bei der Untersuchung von Singularitäten spielt die quadratische Form einer Singularität eine wichtige Rolle. Wenn $f: (\mathbb{C}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ der Keim einer analytischen Funktion mit einer isolierten Singularität in 0 ist, so ist die quadratische Form von f die Schnittform auf der (n-1)-ten Homologiegruppe der Milnorfaser eines stabil äquivalenten Funktionskeims mit $n \geq 3$ (4). Es gibt bis jetzt keine allgemeine Methode zur Berechnung dieser Form, sondern nur Methoden für gewisse Klassen von Singularitäten. Man berechnet dabei die Schnittmatrix bezüglich einer gewissen geometrisch konstruierten Basis, einer geometrischen oder ausgezeichneten Basis. Sie wird üblicherweise durch einen Graphen angegeben, das sogenannte Dynkindiagramm. Das Dynkindiagramm bezüglich einer ausgezeichneten Basis enthält zudem zusätzliche Information: es bestimmt die Monodromiegruppe und den klassischen Monodromieoperator der Singularität. Bei allen bisher bekannten Methoden haben aber die berechneten Dynkindiagramme eine Form, aus der man im allgemeinen die Struktur der quadratischen Form nicht ohne weiteres ablesen kann. Die Dynkindiagramme der einfachen und der unimodularen Singularitäten lassen sich aber durch Basiswechsel auf eine einfache "kanonische" Form bringen, aus der man direkt die Struktur der quadratischen Form bestimmen kann. Der Basiswechsel wird dabei so vorgenommen, daß möglichst wenig von der zusätzlichen Information verloren geht. Er geschieht mit Hilfe von elementaren Operationen, die zwar nicht notwendig die Eigenschaft der Basis, ausgezeichnet zu sein, erhalten, aber doch die weniger starke Eigenschaft, im Sinne von Gabrielov schwach ausgezeichnet zu sein. Das bedeutet insbesondere, daß die neuen Diagramme weiterhin die Monodromiegruppe bestimmen.

In der vorliegenden Arbeit werden nun die Ergebnisse solcher Transformationen für eine große Klasse von Singularitäten dargestellt. Es handelt sich um sämtliche Singularitäten der Listen von Arnold ([A1], [A2]) mit Ausnahme der Singularitäten der Serie V. Diese Listen enthalten insbesondere alle Singularitäten der Modulzahl 0, 1 und 2 und weiterhin gewisse Serien von Singularitäten, bei denen Modulzahlen und Milnorzahlen unbeschränkt wachsen. Für die angeführten Singularitäten hat Gabrielov in [G3] Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen berechnet. Wir zeigen, daß man bezüglich schwach ausgezeichneter Basen alle diese Dynkindiagramme auf eine Gestalt bringen kann, die als eine Erweiterung der kanonischen Form von Gabrielov für die unimodularen Singularitäten angesehen werden kann und insbesondere im unimodularen Fall mit ihr übereinstimmt (Theorem 1.1). Für die Singularitäten einiger Serien läßt sich noch eine andere Form finden, die die Form von Gabrielov in anderer Weise verallgemeinert (Theorem 1.2).

Die neuen Diagramme sind nun insbesondere von einer Gestalt, die die Struktur der quadratischen Formen sichtbar werden läßt. Mit ihrer Hilfe berechnen wir die Diskriminanten und Signaturen der entsprechenden quadratischen Formen und geben eine Beschreibung der entsprechenden Gitter durch Aufspaltung in orthogonale Summen von bekannten Gittern und den in Kap. 2.1 eingeführten Gittern $M_{p,q,r}^{s,t,u}$ (Kap. 2).

Wir wenden diese Resultate an, um eine Charakterisierung der Monodromiegruppen dieser Singularitäten zu geben. Die Monodromiegruppe ist nach der Picard-Lefschetz-Theorie eine von den Spiegelungen zu den Elementen einer schwach ausgezeichneten Basis erzeugte Untergruppe $\Gamma_L$ der Einheitengruppe $O(L)$ des Gitters $L$ der Singularität. Sie ist damit a priori

nicht nur von der quadratischen Form abhängig, sondern auch von der Basis. Pinkham hat nun aber in [P1] gezeigt, daß sich die Monodromiegruppe einer unimodularen exzeptionellen Singularität mit einer gewissen arithmetischen Untergruppe $G_{IR}(L)$ (siehe Definition 3.3) der Einheitengruppe des Gitters der Singularität identifizieren läßt. (Die Behauptung in [P1] muß etwas modifiziert werden, vgl. dazu [B2].) Für den Beweis dieser Aussage benutzt Pinkham tiefliegende algebraisch-geometrische Methoden. Brieskorn hat für einige Fälle einen rein algebraischen Beweis gegeben (vgl. [B3]), der von C.T.C. Wall [W2] entwickelte Techniken benutzt. Dieser bildete die Grundlage für den Beweis eines allgemeinen Satzes über das Zusammenfallen von $\Gamma_L$ und $G_{IR}(L)$ für gewisse Gitter L (Theorem 3.1). Hierzu steuerte M. Kneser ein entscheidendes tiefliegendes Resultat bei, das getrennt in [K4] veröffentlicht wird und das wir anwenden. Aus Theorem 3.1 folgt zusammen mit den Ergebnissen über die Dynkindiagramme und quadratischen Formen, daß die arithmetische Charakterisierung der Monodromiegruppe nach Pinkham für alle betrachteten Singularitäten, eventuell mit Ausnahme der hyperbolischen Singularitäten der $T_{p,q,r}$-Serie mit $(p,q,r) \neq (2,3,7), (2,4,5), (3,3,4)$, gültig ist. Zu diesen Singularitäten vergleiche man die Bemerkungen am Ende von Kap. 3.

Die betrachteten Singularitäten schließen, wie schon erwähnt, sämtliche bimodularen Singularitäten ein. Für diese Singularitäten nehmen die transformierten Dynkindiagramme eine besonders einfache "kanonische" Gestalt an (Korollar 4.1.1). Wie im unimodularen Fall lassen sich die Graphen durch gewisse Zahlen charakterisieren, die aber nur zum Teil wie bei Gabrielov die Längen gewisser Arme der Graphen angeben. Bei den exzeptionellen unimodularen Singularitäten hat man eine seltsame Dualität

zwischen diesen Zahlen und den Selbstschnittzahlen von gewissen exzeptionellen Kurven einer minimalen guten Auflösung von $(X,0)$, wobei $X = f^{-1}(0)$ und $f: (\mathbb{C}^3,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ ein Repräsentant der jeweiligen Singularitätenklasse ist (vgl. [A1], [P2]). Auch im bimodularen Fall und nicht nur bei den exzeptionellen Singularitäten findet man eine Dualität zwischen einigen der Zahlen, die unsere Graphen charakterisieren, und solchen Selbstschnittzahlen (Tabelle 4a/b und Bemerkung 1) von Kap. 4.1). Dazu ist allerdings zu bemerken, daß jeder Singularität mehrere verschiedene Diagramme der kanonischen Gestalt zugeordnet sind, wodurch die Beziehungen sich insgesamt komplexer gestalten. Umgekehrt wurde bei den bimodularen Singularitäten das Phänomen entdeckt, daß Singularitäten aus verschiedenen $\mu$-konst.-Strata gleiche Dynkindiagramme bezüglich schwach ausgezeichneter Basen und damit gleiche Monodromiegruppen haben. Allgemeiner weisen wir diese Tatsache bei jeder geraden Modulzahl nach (Korollar 1.1). Allerdings lassen sich bei diesen Singularitäten keine übereinstimmenden Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen finden.

Dies führte zu der Untersuchung, inwieweit sich Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen in ähnlicher Gestalt wie der "kanonischen" finden lassen. Soweit uns bekannt ist, war diese Frage auch im unimodularen Fall hinsichtlich der kanonischen Form von Gabrielov noch offen. Wir zeigen, daß man in diesem Fall auch ausgezeichnete Basen mit den Diagrammen von Gabrielov finden kann, und geben für die bimodularen Singularitäten Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen an, die vielleicht den Diagrammen zu schwach ausgezeichneten Basen in unserer "kanonischen" Form am nächsten kommen (vgl. Kap. 4.2). Die Transformationen, die hierzu nötig waren, wurden zum Teil mit Hilfe eines Computers gefunden.

Die grundlegenden Transformationen sind im Anhang beschrieben. Sie sind dem periodischen Aufbau der Serien (vgl. [A1]), der auch in allen Ergebnissen zutage tritt, angepaßt.

Herrn Prof. Dr. E. Brieskorn danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die Unterstützung bei ihrem Entstehen. Satz 2.1.2 und Satz 2.2.2 samt den angegebenen Beweisen gehen auf Mitteilungen von Herrn Prof. Dr. M. Kneser zurück. Ihm gilt auch mein Dank für die Mitarbeit an dem Beweis von Theorem 3.1. Schließlich danke ich Herrn Prof. Dr. A. M. Gabrielov für die Zusendung eines Preprints von [G3] und der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis:


| | Seite |
|---|---|
| 0. Grundlegende Begriffe und Bezeichnungen | 1 |
| 0.1 Gitter | 1 |
| 0.2 Basen und Basiswechsel | 2 |
| 0.3 Die quadratische Form einer Singularität | 3 |
| 1. Dynkindiagramme zu schwach ausgezeichneten Basen | 6 |
| 2. Quadratische Formen | 21 |
| 2.1 Die Gitter $M^{s,t,u}_{p,q,r}$ | 21 |
| 2.2 Die Analyse der quadratischen Formen | 28 |
| 3. Eine Charakterisierung der Monodromiegruppen | 43 |
| 4. Dynkindiagramme der bimodularen Singularitäten | 52 |
| 4.1 Schwach ausgezeichnete Basen | 52 |
| 4.2 Ausgezeichnete Basen | 60 |
| Anhang | 64 |
| A.1. Transformationen zu Kapitel 1 | 64 |
| A.2. Transformationen zu Kapitel 4.2 | 90 |
| Literaturverzeichnis | 107 |

## 0. Grundlegende Begriffe und Bezeichnungen

### 0.1 Gitter

In dieser Arbeit bezeichnet L immer ein gerades ganzzahliges Gitter, d.h. einen endlich erzeugten freien $\mathbb{Z}$-Modul mit einer symmetrischen Bilinearform $b: L \times L \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $b(x,x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$. Als zugehörige quadratische Form bezeichnen wir die Form $b(x,x)$. Sie ist eine gerade quadratische Form. (Es ist auch üblich, die Form $q(x) = \frac{1}{2} b(x,x)$ zu betrachten.) Wir setzen $L_{\mathbb{Q}} = L \otimes \mathbb{Q}$, $L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$. L ist dann ein $\mathbb{Z}$-Gitter auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $L_{\mathbb{Q}}$ (im Sinne von [01]), $L \subset L_{\mathbb{Q}} \subset L_{\mathbb{R}}$.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

rg (L) = Rang von L,

disk (L) = Diskriminante von L,

$\mu_0$ = Dimension des Radikals rad L,

$\mu_+$ ($\mu_-$) = maximale Dimension eines Unterraums, auf dem die Form positiv (negativ) definit ist,

$(\mu_+,\mu_-)$ = Signatur von L, wenn L nicht entartet ist,

$L \oplus L'$ = orthogonale direkte Summe von L und L',

$kL = \underbrace{L \oplus \ldots \oplus L}_{k}$.

Für $v \in L_{\mathbb{R}}$ mit $b(v,v) \neq 0$ definieren wir die Spiegelung zu v $s_v$ durch

$$s_v(x) = x - \frac{2b(v,x)}{b(v,v)} v \qquad \text{für } x \in L.$$

Mit $A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$ und $E_8$ bezeichnen wir diejenigen negativ definiten Gitter, die aus den Gittern zu den entsprechenden Wurzelsystemen (vgl.

[B1]) entstehen, indem man die Form -b statt b betrachtet. Eine unimodulare hyperbolische Ebene U ist ein Gitter vom Rang 2, das eine Basis $\{f_1,f_2\}$ besitzt, so daß $b(f_1,f_1) = b(f_2,f_2) = 0$ und $b(f_1,f_2) = 1$.

Für alle anderen nicht näher erläuterten Bezeichnungen und Begriffe, wie z.B. rad L, O(L), $O^+(L)$, sei auf [O1] verwiesen.

## 0.2 Basen und Basiswechsel

Sei $\{e_1,e_2,\ldots,e_\mu\}$ eine Basis des Gitters L. Das Dynkindiagramm von L zur Basis $\{e_1,e_2,\ldots,e_\mu\}$ ist der folgende bewertete (gewichtete) Graph G:

a) Die Ecken von G stehen in eineindeutiger Beziehung zu den Basiselementen $e_i$, und die i-te Ecke ist mit $b(e_i,e_i)$ bewertet.

b) Die i-te und j-te Ecke von G sind durch $|b(e_i,e_j)|$ Kanten verbunden, die gestrichelt sind, wenn $b(e_i,e_j) < 0$.

Ein solcher Graph definiert umgekehrt eine quadratische Form. Wir verwenden dann für diese oft die gleiche Bezeichnung wie für den Graphen. Eine Ecke mit der Bewertung $b(e_i,e_i)$ zeichnen wir in der folgenden Weise:

Ecken mit $b(e_i,e_i) = -2$ zeichnen wir $\bullet$, also $\bullet = \textcircled{-2}$.

Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß $b(e_i,e_i) = -2$ für alle i ist. Wir definieren elementare Basiswechseloperationen: Die Operationen $\alpha_k(k')$ für $1 \leq k,k' \leq \mu$ seien definiert durch:

$$\alpha_k(k')(e_i) = \tilde{e}_i := \begin{cases} s_{e_k}(e_{k'}) & \text{für } i = k', \\ e_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$b(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) = b(e_i,e_j) \quad \text{für } 1 \leq i,j \leq \mu,\ i,j \neq k' \text{ oder } i = j = k',$$
$$b(\tilde{e}_k,\tilde{e}_{k'}) = -b(e_k,e_{k'}) \quad \text{falls } k \neq k',$$
$$b(\tilde{e}_i,\tilde{e}_{k'}) = b(e_i,e_{k'}) + b(e_k,e_{k'})b(e_i,e_k) \quad \text{für } i \neq k,k'.$$

Für $1 \leq k < \mu$ definieren wir Operationen $\zeta_k$ durch

$$\zeta_k(e_i) := \begin{cases} e_{k+1} & \text{für } i = k, \\ e_k & \text{für } i = k+1, \\ e_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann setzen wir für $1 \leq k < \mu$

$$\alpha_k := \zeta_k \circ \alpha_k(k+1),$$
$$\beta_{k+1} := \alpha_k^{-1} = \zeta_k \circ \alpha_{k+1}(k)$$

und schließlich für $1 \leq k \leq \mu$

$$\gamma_k := \alpha_k(k).$$

## 0.3 Die quadratische Form einer Singularität

Für die genauen Definitionen der in der Arbeit verwendeten Begriffe aus der Theorie der Singularitäten komplexer Hyperflächen sei auf [H2], [G2] oder [A1] verwiesen. Wir erinnern hier nur an die für das Verständnis der Arbeit wesentlichen Begriffe und Tatsachen.

Sei $f: (\mathbb{C}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ der Keim einer analytischen Funktion mit einer

isolierten Singularität in 0 und $n \equiv 3\ (4)$. Sei F die Milnorfaser zu f (vgl. [M2]). Dann ist $H_{n-1}(F,\mathbb{Z})$ mit der Schnittform b ein gerades Gitter vom Rang $\mu$, wobei $\mu$ die Milnorzahl von f ist. Es gilt:

$$H_{n-1}(F,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = H_{n-1}(F,\mathbb{Q}),$$
$$H_{n-1}(F,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} = H_{n-1}(F,\mathbb{R}).$$

In $H_{n-1}(F,\mathbb{Z})$ sind auf geometrische Weise zwei Klassen von Basen $\{e_1,e_2,\ldots,e_\mu\}$ mit $b(e_i,e_i) = -2$ definiert: die ausgezeichneten und die schwach ausgezeichneten Basen (von verschwindenden Zykeln) (zur Definition siehe [G2], [H2]). Die Operationen $\alpha_k(k')$, $\alpha_k$, $\beta_{k+1}$ sind gerade die von Gabrielov eingeführten elementaren Basiswechseloperationen. Die Operationen $\alpha_k(k')$ führen schwach ausgezeichnete Basen in schwach ausgezeichnete Basen über, die Operationen $\alpha_k$, $\beta_{k+1}$ und $\gamma_k$ ausgezeichnete Basen in ausgezeichnete Basen (vgl. [G2], [H2]). Die Operation $\gamma_k$ entspricht gerade einem Orientierungswechsel.

Mit Hilfe dieser Klassen von Basen lassen sich die Monodromiegruppe und der klassische Monodromieoperator der Singularität wie folgt beschreiben. Nach der Picard-Lefschetz-Theorie ist die von allen Spiegelungen zu den Elementen einer schwach ausgezeichneten Basis erzeugte Gruppe die Monodromiegruppe der Singularität. Ist $\{e_1,e_2,\ldots,e_\mu\}$ eine ausgezeichnete Basis der Singularität, so ist

$$h = s_{e_1} \circ s_{e_2} \circ \ldots \circ s_{e_\mu}$$

der klassische Monodromieoperator der Singularität. (Vgl. [H2])

Sei nun n beliebig. Die quadratische Form der Singularität von f ist die Form, die durch die Bilinearform eines stabil äquivalenten Funktionskeims mit $n \equiv 3\ (4)$ definiert ist. Entsprechend sind die Begriffe

Gitter und Dynkindiagramm einer Singularität definiert.

Wir bezeichnen wie in [A1] mit dem Wort "Singularität" auch die Stabil-Äquivalenzklasse einer $\mu$=konst.-Familie von Funktionskeimen. Alle oben erwähnten Begriffe hängen nur vom $\mu$=konst.-Stratum ab. Sämtliche in der Arbeit betrachteten Singularitätenklassen besitzen Repräsentanten $f: (\mathbb{C}^3,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$. Wir beziehen alle Begriffe wie Gitter, Monodromiegruppe und Monodromieoperator einer Singularität auf diese Repräsentanten.

## 1. Dynkindiagramme zu schwach ausgezeichneten Basen

Gabrielov hat in [G3] für alle Singularitäten der Listen von Arnold ([A1], [A2]), die Serie V ausgenommen, Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen berechnet. Mit Hilfe von Folgen der elementaren Basiswechseloperationen $\alpha_k(k')$ läßt sich daraus das folgende Resultat ableiten:

**Theorem 1:**

Alle Singularitäten der Serien A, D, J, E, X, Y, Z, W, T, Q, S, U mit beliebiger Modulzahl besitzen eine schwach ausgezeichnete Basis mit einem Dynkindiagramm der Form $T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y)$ (siehe Abbildung 1), wobei die Werte p,q,r,s,t,u,v,w,x,y in Tabelle 1a und 1b aufgeführt sind.

Theorem 1 wird im Anhang in Kap.A.1 bewiesen.

**Bemerkungen:**

1) Der Graph $T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y)$ ist definiert für

$p,q,r,s,t,u,v,w,x,y \geq 0$ und

$p > 2y$, $q > 2(\chi(w)+x+y)$, $r > 2(\chi(s)+t+\chi(u)+v+\chi(w)+x+y)$,

wobei $\chi: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ mit

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sind in den Tabellen immer nur höchstens 4 der Werte s,t,u,v,w,x,y von Null verschieden.

2) In den Tabellen sind insbesondere alle 0-, 1- und 2-modularen Singu-

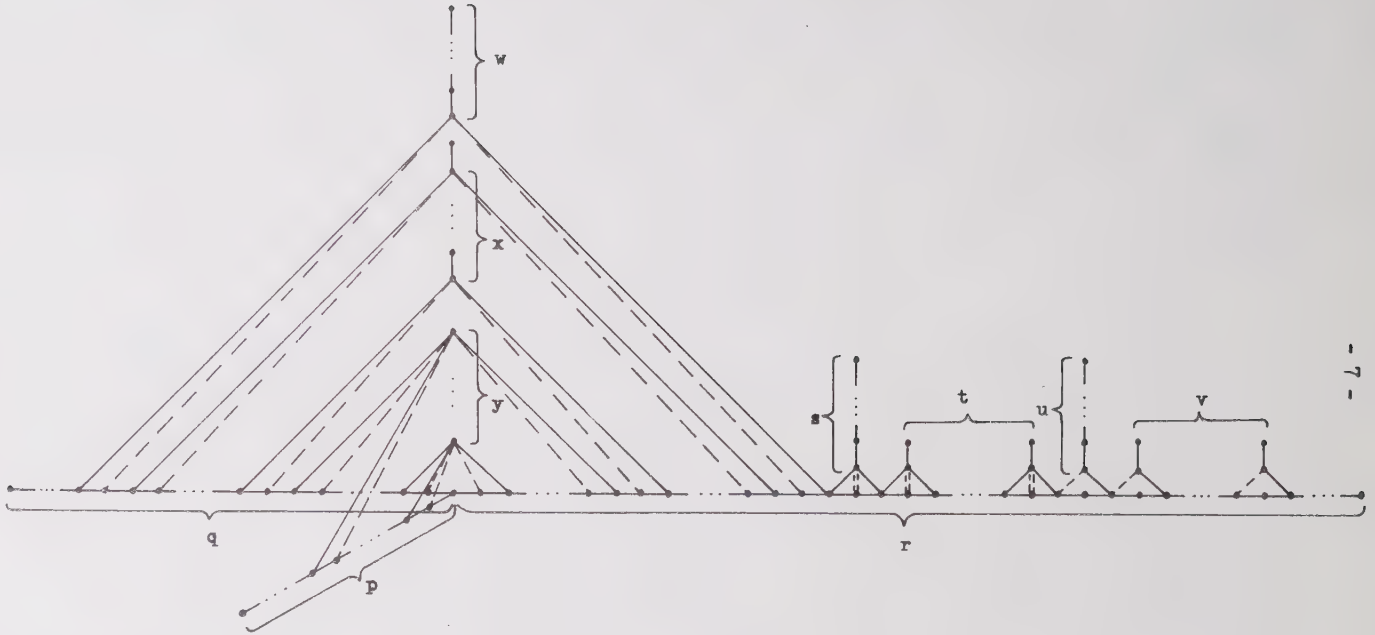



Abbildung 1: Der Graph T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y)

Tabelle 1a

| Singularität | Einschränk. | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_k$ | $k\geq 1$ | 1 | 1 | k | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $D_k$ | $k\geq 4$ | 2 | 2 | k-2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $J_{21+1,i}$ | $l\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+2+i | 0 | 1 | 1 | l-1 | 0 | 0 | 0 |
| $J_{21+2,i}$ | $l\geq 0, i\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+6+i | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_{12l+6}$ | $l\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_{12l+12}$ | $l\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+7 | 0 | l+1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_{12l+7}$ | $l\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_{12l+13}$ | $l\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+8 | 0 | l+1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_{12l+8}$ | $l\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_{12l+14}$ | $l\geq 0$ | 2 | 3 | 8l+9 | 0 | l+1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $X_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 4k | 4k | i+1 | k-1 | 0 | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $Y^k_{i,j}$ | $k\geq 1$, $1\leq j\leq i$ | 2 | 4k+j | 4k+i | 1 | k-1 | 0 | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{21-1,i}$ | $k\geq 1, l\geq 1$, $i\geq 0$ | 2 | 4k | 4k+8l-4+i | 0 | k-1+l | 1 | l-1 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{21,i}$ | $k\geq 1, l\geq 1$, $i\geq 0$ | 2 | 4k | 4k+8l+i | 1 | k-1+l | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{12k+12l-7}$ | $k\geq 1, l\geq 1$ | 2 | 4k | 4k+8l-3 | 0 | k-1+l | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{12k+12l-1}$ | $k\geq 1, l\geq 0$ | 2 | 4k | 4k+8l+1 | 0 | k+1 | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{12k+12l-6}$ | $k\geq 1, l\geq 1$ | 2 | 4k | 4k+8l-2 | 0 | k-1+l | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{12k+12l}$ | $k\geq 1, l\geq 0$ | 2 | 4k | 4k+8l+2 | 0 | k+1 | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{12k+12l-5}$ | $k\geq 1, l\geq 1$ | 2 | 4k | 4k+8l-1 | 0 | k-1+l | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $Z^k_{12k+12l+1}$ | $k\geq 1, l\geq 0$ | 2 | 4k | 4k+8l+3 | 0 | k+1 | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $W_{12k}$ | $k\geq 1$ | 2 | 4k+1 | 4k+1 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $W_{12k+1}$ | $k\geq 1$ | 2 | 4k+1 | 4k+2 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k-1 | 0 |

Tabelle 1a (Fortsetzung)

| Singularität | Einschränk. | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 4k+2 | 4k+2 | 0 | k | 0 | 0 | i+1 | k-1 | 0 |
| $W^{\#}_{k,2j-1}$ | $k\geq 1, j\geq 1$ | 2 | 4k+1+j | 4k+2+j | 0 | k | 0 | 0 | 1 | k-1 | 0 |
| $W^{\#}_{k,2j}$ | $k\geq 1, j\geq 1$ | 2 | 4k+2+j | 4k+2+j | 0 | k | 0 | 0 | 1 | k-1 | 0 |
| $W_{12k+5}$ | $k\geq 1$ | 2 | 4k+2 | 4k+3 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k | 0 |
| $W_{12k+6}$ | $k\geq 1$ | 2 | 4k+3 | 4k+3 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k | 0 |
| $T_{i,j,k}$ | $\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\frac{1}{k}<1$ | i | j | k | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{21,i}$ | $1\geq 1, i\geq 0$ | 3 | 3 | 81-1+i | 0 | 1 | 1 | 1-1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{21+1,i}$ | $1\geq 0, i\geq 0$ | 3 | 3 | 81+3+i | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+4}$ | $1\geq 1$ | 3 | 3 | 81 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+10}$ | $1\geq 0$ | 3 | 3 | 81+4 | 0 | 1+1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+5}$ | $1\geq 1$ | 3 | 3 | 81+1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+11}$ | $1\geq 0$ | 3 | 3 | 81+5 | 0 | 1+1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+6}$ | $1\geq 1$ | 3 | 3 | 81+2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+12}$ | $1\geq 0$ | 3 | 3 | 81+6 | 0 | 1+1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $S_{12k-1}$ | $k\geq 1$ | 3 | 4k | 4k | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $S_{12k}$ | $k\geq 1$ | 3 | 4k | 4k+1 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $S_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 0$ | 3 | 4k+1 | 4k+1 | 0 | k | 0 | 0 | i+1 | k-1 | 0 |
| $S^{\#}_{k,2j-1}$ | $k\geq 1, j\geq 1$ | 3 | 4k+j | 4k+1+j | 0 | k | 0 | 0 | 1 | k-1 | 0 |
| $S^{\#}_{k,2j}$ | $k\geq 1, j\geq 1$ | 3 | 4k+1+j | 4k+1+j | 0 | k | 0 | 0 | 1 | k-1 | 0 |
| $S_{12k+4}$ | $k\geq 1$ | 3 | 4k+1 | 4k+2 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k | 0 |
| $S_{12k+5}$ | $k\geq 1$ | 3 | 4k+2 | 4k+2 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | k | 0 |
| $U_{12k}$ | $k\geq 1$ | 3k+1 | 3k+1 | 3k+1 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | 0 | k-1 |

Tabelle 1a (Fortsetzung)

| Singularität | Einschränk. | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_{k,2j-1}$ | $k\geq 1, j\geq 1$ | 3k+1 | 3k+1+j | 3k+1+j | 0 | k | 0 | 0 | 1 | 0 | k-1 |
| $U_{k,2j}$ | $k\geq 1, j\geq 0$ | 3k+1 | 3k+1+j | 3k+2+j | 0 | k | 0 | 0 | 1 | 0 | k-1 |
| $U_{12k+4}$ | $k\geq 1$ | 3k+2 | 3k+2 | 3k+2 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | 0 | k |

Tabelle 1b

| Singularität | Einschränk. | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{21+1,i}$ | $1\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 3 | 81+2 | 0 | 1 | 1+i | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $E_{121+6}$ | $1\geq 0$ | 3 | 3 | 81+2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_{121+7}$ | $1\geq 0$ | 2 | 4 | 81+3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| " | " | 3 | 4 | 81+2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| " | $1\geq 1$ | 2 | 3 | 81+3 | 0 | 1 | 3 | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $E_{121+8}$ | $1\geq 0$ | 2 | 5 | 81+3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| " | " | 3 | 5 | 81+2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| " | $1\geq 1$ | 2 | 3 | 81+3 | 0 | 1 | 4 | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $Z^k_{21-1,i}$ | $k\geq 1, 1\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 4k | 4k+81-4 | 0 | k-1 +1 | 1+i | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $Z^1_{121+5}$ | $1\geq 1$ | 3 | 3 | 81 | 0 | 1 | 3 | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $Z^1_{121+6}$ | $1\geq 1$ | 3 | 4 | 81 | 0 | 1 | 3 | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $Z^k_{12k+121-6}$ | $k\geq 1, 1\geq 1$ | 2 | 4k | 4k+81-3 | 0 | k-1 +1 | 3 | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $Z^1_{121+7}$ | $1\geq 1$ | 2 | 5 | 81+1 | 0 | 1 | 3 | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| " | " | 3 | 5 | 81 | 0 | 1 | 3 | 1-i | 0 | 0 | 0 |
| $Z^k_{12k+121-5}$ | $k\geq 1, 1\geq 1$ | 2 | 4k | 4k+81-3 | 0 | k-1 +1 | 4 | 1-i | 0 | 0 | 0 |

Tabelle 1b (Fortsetzung)

| Singularität | Einschränk. | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{21,i}$ | $l\geq 1, i\geq 0$ | 3 | 3 | 81-1 | 0 | 1 | 1+i | 1-1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+5}$ | $l\geq 1$ | 3 | 3 | 81 | 0 | 1 | 3 | 1-1 | 0 | 0 | 0 |
| $Q_{121+6}$ | $l\geq 1$ | 3 | 3 | 81 | 0 | 1 | 4 | 1-1 | 0 | 0 | 0 |
| $W_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 4k+1 | 4k+3+i | 0 | k | 1 | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $W^{\#}_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 1$ | 2 | 4k+1 | 4k+3 | 0 | k | 1+i | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $W_{12k+5}$ | $k\geq 1$ | 2 | 4k+1 | 4k+4 | 0 | k | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $W_{12k+6}$ | $k\geq 1$ | 2 | 4k+1 | 4k+5 | 0 | k | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| " | " | 2 | 4k+2 | 4k+3 | 0 | k | 0 | 0 | 3 | k-1 | 0 |
| $S_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 0$ | 3 | 4k | 4k+2+i | 0 | k | 1 | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $S^{\#}_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 1$ | 3 | 4k | 4k+2 | 0 | k | 1+i | 0 | 0 | k-1 | 0 |
| $S_{12k+4}$ | $k\geq 1$ | 3 | 4k | 4k+3 | 0 | k | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| $S_{12k+5}$ | $k\geq 1$ | 3 | 4k | 4k+4 | 0 | k | 0 | 1 | 0 | k-1 | 0 |
| " | " | 3 | 4k+1 | 4k+2 | 0 | k | 0 | 0 | 3 | k-1 | 0 |
| $U_{k,i}$ | $k\geq 1, i\geq 0$ | 3k+1 | 3k+1 | 3k+2 | 0 | k | 0 | 0 | 1+i | 0 | k-1 |
| $U_{12k+4}$ | $k\geq 1$ | 3k+1 | 3k+2 | 3k+2 | 0 | k | 0 | 0 | 0 | 1 | k-1 |

laritäten erfaßt. (Die Modulzahlen m und die Milnorzahlen μ der einzelnen Singularitäten sind in Tabelle 3 zu finden.) Für die 0-modularen (die einfachen) Singularitäten ist die Behauptung wohlbekannt. Die Dynkindiagramme haben die Form T(p,q,r,0,...,0) mit den bekannten Werten von p,q und r. Für die unimodularen Singularitäten haben die Diagramme die Form T(p,q,r,1,0,...,0) bzw. T(p,q,r,0,1,0,...,0). Nach einer Verschiebung (vgl. Bemerkung 3)) stimmen die Formen der Graphen mit den kanonischen Formen von Gabrielov [G1] überein. Für eine genauere Beschreibung der Dynkindiagramme der bimodularen Singularitäten siehe Kap. 4.

3) Den Untergraphen T(p,q,r,0,...,0) von T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y) bezeichnen wir als das "Fundament" von T(p,q,...,y). Nach Entfernung des Fundaments zerfällt der Graph in einzelne disjunkte zusammenhängende Graphen, die wir "Türme" nennen. Die Kanten, die die Türme mit dem Fundament verbinden, nennen wir "Pfeiler". Diese Pfeiler lassen sich durch sukzessive Anwendung der Transformationen von Abbildung 2 auf dem Fundament "verschieben". Abbildung 3 zeigt die Veränderung der Graphen, wenn die Pfeiler zum Rand oder zur zentralen Ecke des Fundaments geschoben werden. Das Fundament kann dabei auch noch andere Türme, die sich in Positionen wie in den mit b) bezeichneten Darstellungen von Abbildung 3 befinden, tragen. An den Pfeilern dieser Türme kann man die anderen Pfeiler vorbeischieben, ohne daß danach Kanten von Turm zu Turm bestehen bleiben.

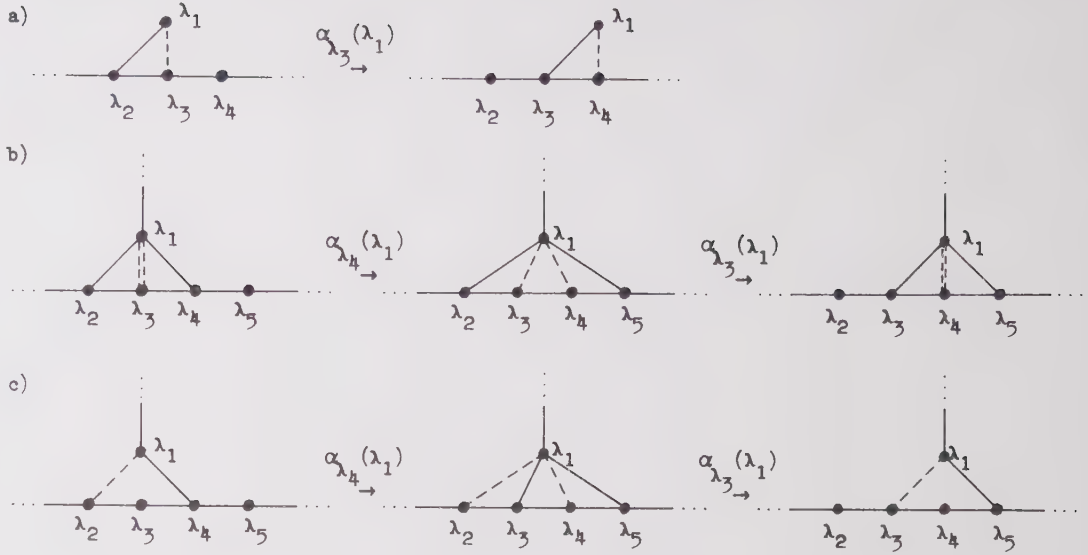

a)
b)
c)
$\lambda_1$
$\lambda_2$
$\lambda_3$
$\lambda_4$
$\lambda_5$
$\alpha_{\lambda_3 \to}(\lambda_1)$
$\alpha_{\lambda_4 \to}(\lambda_1)$

Abbildung 2

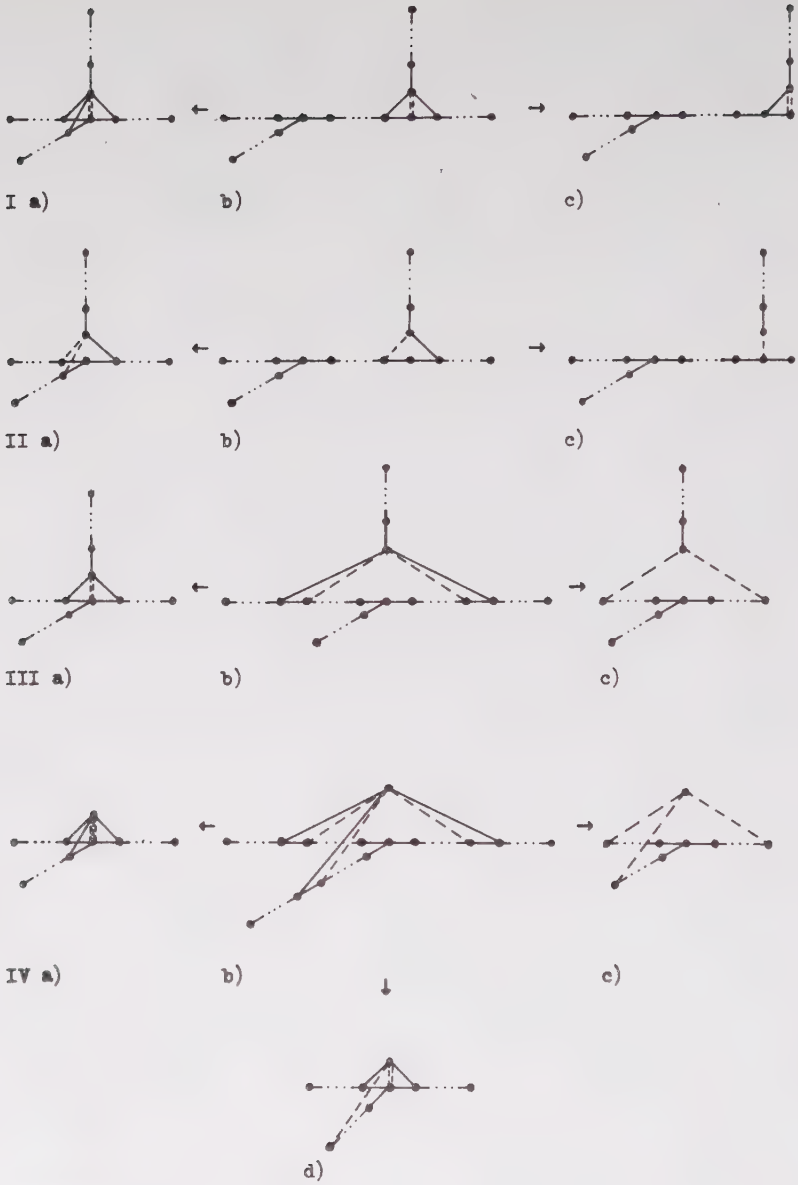



Abbildung 3

4) Die Zuordnung der Werte p,q,...,y zu den einzelnen Singularitäten ist nicht eindeutig. In Tabelle 1b sind für einige Singularitäten andere Möglichkeiten der Belegung der Werte p,q,...,y angegeben.

5) Umgekehrt gibt es Singularitäten aus verschiedenen $\mu$-konst.-Strata, die die gleichen Werte p,q,...,y und damit die gleichen Dynkindiagramme bezüglich schwach ausgezeichneter Basen haben. Hierüber gibt Korollar 1 Auskunft.

Korollar 1:

Sei $l \geq 1$ beliebig. Bei den Singularitäten aus den Klassen, die in dem folgenden Schema jeweils in einer Zeile stehen, gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den schwach ausgezeichneten Basen einer Singularität aus der linken Klasse und den schwach ausgezeichneten Basen einer Singularität aus der rechten Klasse in der Zeile, so daß die Dynkindiagramme zu den einander zugeordneten Basen paarweise übereinstimmen:

$$Z^1_{121+5} \longleftrightarrow Q_{121+5}$$
$$E_{121+6} \longleftrightarrow Q_{121+6}$$
$$E_{121+7} \longleftrightarrow Z^1_{121+7}\ .$$

Insbesondere haben also die einander zugeordneten Singularitäten die gleiche quadratische Form (vgl. Kap. 2) und die gleiche Monodromiegruppe. Die Modulzahl der obigen Singularitäten ist 21. Dieses Phänomen tritt also in der Hierarchie der Singularitäten zum ersten Mal bei den bimodularen Singularitäten auf. Allerdings lassen sich bei den jeweiligen Singularitätenpaaren keine zwei ausgezeichneten Basen finden, bezüglich derer die Dynkindiagramme (nun mit Numerierung) übereinstimmen. Denn in

jeder Klasse gibt es einen quasihomogenen Repräsentanten, und es läßt sich leicht nachrechnen, daß die klassischen Monodromieoperatoren der jeweiligen Repräsentanten aus verschiedenen Klassen verschiedene Ordnung haben.

Für einige Serien lassen sich auch Dynkindiagramme in einer anderen Form angeben, die als eine anders geartete Erweiterung der kanonischen Form von Gabrielov für die unimodularen Singularitäten angesehen werden kann.

Theorem 2:

Die Singularitäten der Serien J, E, $Z^1$ und Q besitzen eine schwach ausgezeichnete Basis mit einem Dynkindiagramm der Form von Abbildung 4, wobei die Werte a,b,c,d,e,f,g,h in Tabelle 2 aufgeführt sind.

Nach der Vereinbarung von [A1] bzw. [A2] wird der obere Index 1 bei den Singularitäten der Serie $Z^1$ weggelassen. Nach Korollar 1 sind die Dynkindiagramme der in dem Schema dieses Korollars links stehenden Singularitäten gleichzeitig auch Dynkindiagramme der in den entsprechenden Zeilen rechts aufgeführten Singularitäten und umgekehrt. Für den Beweis von Theorem 2 verweisen wir ebenfalls auf den Anhang, Kap. A.1.

Die Tabellen in diesem Kapitel sind natürlich keineswegs vollständig. Die zusätzlichen Möglichkeiten sind nur im Hinblick auf den bimodularen Fall (vgl. Kap. 4.1) angegeben, und selbst in diesem Fall ist es unklar, ob - auch unter Berücksichtigung von Korollar 1 - alle zusätzlichen Möglichkeiten erfaßt sind. Außerdem lassen sich auch noch Diagramme in einer gegenüber den allgemeinen Graphen von Abbildung 1 und 4 leicht abgewan-

delten Form finden. So lassen sich zum Beispiel auch noch Türme mit andersartigen Pfeilern erzeugen.

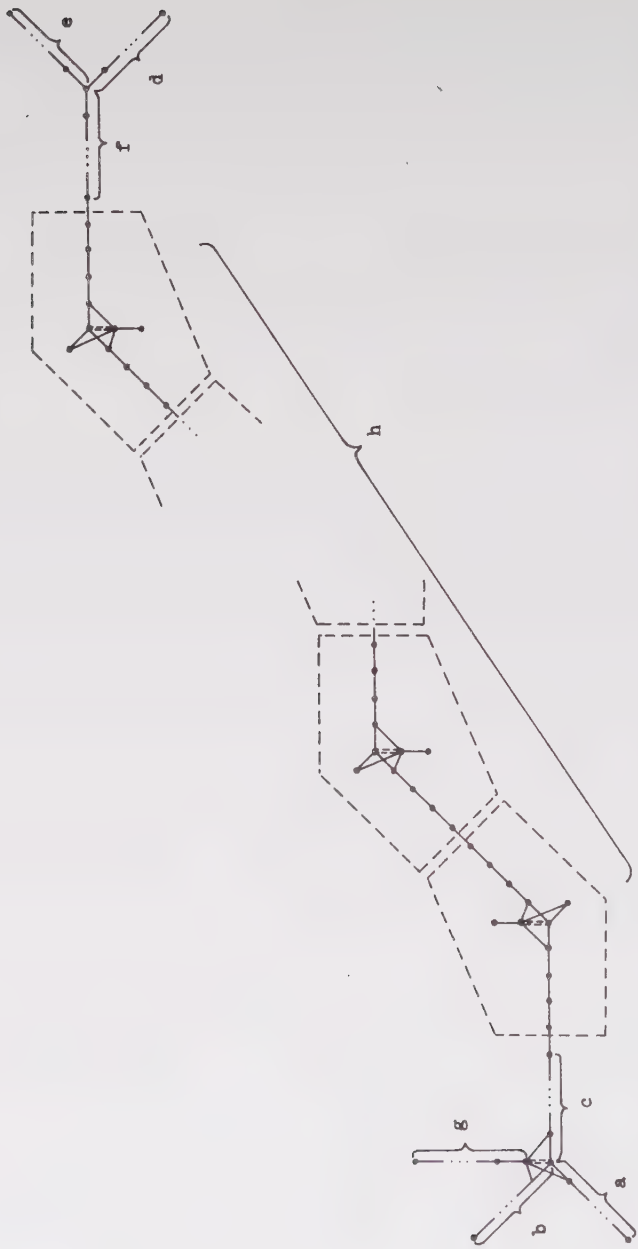



Abbildung 4

Tabelle 2

| Singularität | Einschränk. | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{21+1,i}$ | $1\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 3 | 5 | 2 | 2 | 4+i | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 3 | 5 | 2 | 2+i | 4 | 2 | 1-1 |
| $J_{21+2,i}$ | $1\geq 0, i\geq 0$ | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 1+i | 1 | 1 |
| | | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1+i | 1 |
| $E_{121+6}$ | $1\geq 1$ | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 3 | 5 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1-1 |
| $E_{121+12}$ | $1\geq 0$ | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| $E_{121+7}$ | $1\geq 1$ | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 6 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 3 | 5 | 2 | 4 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 | 2 | 1-1 |
| $E_{121+13}$ | $1\geq 0$ | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| $E_{121+8}$ | $1\geq 1$ | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 7 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 3 | 5 | 2 | 5 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 3 | 5 | 3 | 5 | 4 | 2 | 1-1 |
| $E_{121+14}$ | $1\geq 0$ | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 |
| $Z_{21-1,i}$ | $1\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4+i | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 4 | 3 | 2 | 2+i | 4 | 2 | 1-1 |
| $Z_{21,i}$ | $1\geq 1, i\geq 0$ | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 | 1+i | 1 | 1 |
| | | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1+i | 1 |
| $Z_{121+5}$ | $1\geq 1$ | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1-1 |
| $Z_{121+11}$ | $1\geq 0$ | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| $Z_{121+6}$ | $1\geq 1$ | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 6 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 | 1-1 |
| $Z_{121+12}$ | $1\geq 0$ | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| $Z_{121+7}$ | $1\geq 1$ | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 7 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 4 | 3 | 2 | 5 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 2 | 4 | 3 | 3 | 5 | 4 | 2 | 1-1 |
| $Z_{121+13}$ | $1\geq 0$ | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 |

Tabelle 2 (Fortsetzung)

| Singularität | Einschränk. | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{21,i}$ | $l \geq 1, i \geq 0$ | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 4+i | 2 | 1-1 |
| | | 3 | 3 | 2 | 2 | 2+i | 4 | 2 | 1-1 |
| $Q_{21+1,i}$ | $l \geq 1, i \geq 0$ | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1+i | 1 | 1 |
| | | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1+i | 1 |
| $Q_{121+4}$ | $l \geq 1$ | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1-1 |
| $Q_{121+10}$ | $l \geq 0$ | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| $Q_{121+5}$ | $l \geq 1$ | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 6 | 2 | 1-1 |
| | | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 4 | 2 | 1-1 |
| $Q_{121+11}$ | $l \geq 0$ | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| $Q_{121+6}$ | $l \geq 1$ | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 7 | 2 | 1-1 |
| | | 3 | 3 | 2 | 2 | 5 | 5 | 2 | 1-1 |
| | | 3 | 3 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 1-1 |
| $Q_{121+12}$ | $l \geq 0$ | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 |

## 2. Quadratische Formen

### 2.1 Die Gitter $M^{s,t,u}_{p,q,r}$

Zur Beschreibung der quadratischen Formen der betrachteten Singularitäten führen wir eine bestimmte Art von Gittern ein.

**Definition 1:**

$M^{s,t,u}_{p,q,r}$ sei das durch das Dynkindiagramm von Abbildung 5 definierte Gitter, wobei $q,r,s \geq 1$, $t,u \geq 0$ und $p \geq \begin{cases} 2 & \text{falls } u = 0 \\ 3 & \text{falls } u > 0 \end{cases}$.

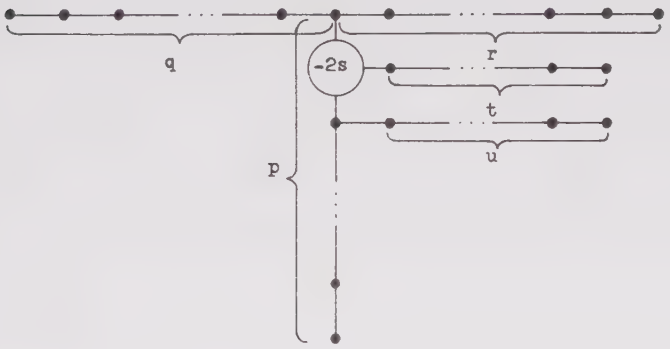



Abbildung 5

**Satz 1:**

Der Rang und die Diskriminante des Gitters $M^{s,t,u}_{p,q,r}$ lassen sich nach den folgenden Formeln berechnen:

$$\operatorname{rg}\left(M^{s,t,u}_{p,q,r}\right) = p+q+r+t+u-2,$$

$$\text{disk}\,(M^{s,t,u}_{p,q,r}) = (-1)^{p+q+r+t+u-1} \cdot$$
$$\Big[(t+1)\Big((u+1)(p-2)(q+r)+(p+u-1)qr\Big) - \Big(2s(t+1)-t\Big)(p+u-1)(q+r)\Big].$$

**Beweis:**

Die Formel für die Diskriminante läßt sich induktiv nach der folgenden wohlbekannten Rekursionsformel herleiten (s.z.B.[H1],p.56f.). Sei G ein Dynkindiagramm mit einer Ecke e, die nur mit einer einzigen weiteren Ecke e' verbunden ist und dies nur durch eine durchgezogene Kante. Dann gilt für die Diskriminante der zugehörigen quadratischen Form:

$$\text{disk}\,(G) = b(e,e)\ \text{disk}\,(G - St\{e\}) - \text{disk}\,(G - St\{e,e'\}),$$

wobei G - StM für eine Teilmenge M der Eckenmenge von G der Graph ist, der entsteht, wenn man aus G alle Ecken aus M und alle damit inzidenten Kanten entfernt.

Zur weiteren Analyse der Gitter $M^{s,t,u}_{p,q,r}$ benötigen wir einen allgemeinen Satz über das Abspalten von hyperbolischen Ebenen.

**Satz 2:**

Sei L ein gerades nicht entartetes indefinites Gitter vom Rang $n \geq 3$ mit

$$p^{n-2} \nmid \text{disk}\,(L)$$

für alle Primzahlen p. Dann gilt $L = U \oplus L'$ für eine unimodulare hyperbolische Ebene U.

**Beweis:**

Wir betrachten L als Gitter auf $V = L_{\mathbb{Q}}$.

a) Wir zeigen zunächst, daß für die Lokalisierung $L_p = L \otimes \mathbb{Z}_p$ für jede

Primzahl p gilt: $L_p = U_p \oplus N_p$ für eine unimodulare hyperbolische Ebene $U_p$ und ein Untergitter $N_p$ über den p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$. Da $p^{n-2} \nmid \operatorname{disk}(L)$, folgt nach der Jordanzerlegung ([01], §91C), daß $L_p$ eine unimodulare Komponente $K_p$ vom Rang $\geq 3$ besitzt. Nach [K2], (14.7) enthält $K_p$ eine hyperbolische Ebene.

b) Für ein nicht entartetes Gitter L mit $L_p = U_p \oplus N_p$ für alle Primzahlen p und $L_\infty = U_\infty \oplus N_\infty$ gilt: Es gibt ein Gitter K im Geschlecht von L mit $K = U \oplus K'$. Dies ist eine leichte Folgerung aus dem Satz von Hasse-Minkowski (für diesen Fall vgl. [01], 66:3) und der Beweis verläuft analog zum Beweis von [K2], (21.1).

c) Da L indefinit ist und $L_p$ für jede Primzahl p eine unimodulare Komponente vom Rang $\geq 3$ besitzt, folgt aus [01], 104:5 und 102:10

$$\operatorname{cls} L = \operatorname{spn} L = \operatorname{gen} L.$$

Für gegebene Zahlen p,q,r,s,t,u mit den Einschränkungen von Definition 1 sei

$$u_0 = -1 + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{p-2} + \cfrac{1}{2s-1+\cfrac{1}{q+1}}},$$

$$t_0 = -1 + \cfrac{1}{-2s+2-\cfrac{1}{q+1} + \cfrac{(u+1)(p-2)}{p+u-1}},$$

$$r_0 = \cfrac{1}{-\cfrac{1}{q} + \cfrac{1}{2s-1+\cfrac{1}{t+1} - \cfrac{(u+1)(p-2)}{p+u-1}}}.$$

Satz 3:

Sei $\operatorname{rg}(M^{s,t,u}_{p,q,r}) \geq 7$, $u < u_0$ falls $u_0 > 0$ und $t < t_0$ falls $t_0 > 0$.

Sei $r_0 > 1$. Dann gilt:

(i) $r < r_0 \Rightarrow M^{s,t,u}_{p,q,r}$ ist nicht entartet, negativ definit und unzerlegbar.

(ii) $r = r_0 \Rightarrow M^{s,t,u}_{p,q,r} = 0 \oplus L$, wobei 0 die Nullform vom Rang 1 und L nicht entartet und negativ definit (aber i.a. zerlegbar) ist.

(iii) $r > r_0 \Rightarrow M^{s,t,u}_{p,q,r} = U \oplus L$, wobei U eine unimodulare hyperbolische Ebene und L nicht entartet und negativ definit (aber i.a. zerlegbar) ist.

Beweis:

a) Die Diskriminante von $M^{s,t,u}_{p,q,r}$ verschwindet für $r = 1$, $t = 0$, $u = u_0$, für $r = 1$, $t = t_0$ und für $r = r_0$. Da der Ausdruck in der Klammer in jeder Variablen linear ist und für $r = 1$, $t = 0$, $u = 0$ und alle $p$, $q$, $s \geq 1$ negativ ist, ist er für alle $p$, $q$, $s \geq 1$, $u < u_0$, falls $u_0 > 0$, und $t < t_0$, falls $t_0 > 0$, negativ im Fall $r < r_0$, er verschwindet im Fall $r = r_0$ und ist positiv im Fall $r > r_0$. Daraus folgt, daß die Signatur in allen Fällen richtig ist.

b) Die Zerlegung im Fall (ii) folgt nach [O1], §82D. Im Fall (iii) gilt

$$| \operatorname{disk} (M^{s,t,u}_{p,q,r}) | \leq (t + 1)(p - 1 + u)qr.$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung rechnet man leicht nach, daß für $\operatorname{rg} (M^{s,t,u}_{p,q,r}) \geq 7$ die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind.

c) Sei $M = M^{s,t,u}_{p,q,r}$ nicht entartet und negativ definit. Wir zeigen, daß dann dieses Gitter unzerlegbar ist. Dazu zerlegen wir die Basis in unzerlegbare Vektoren und teilen diese in Klassen $C_\nu$ ein, wobei x und y zur gleichen Klasse gehören, wenn es unzerlegbare Vektoren $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_n = y$ gibt mit $b(x_i, x_{i+1}) \neq 0$ (vgl. [K3]). Sei f das Basiselement, das der Ecke mit der Länge $-2s$ entspricht. Die anderen Basiselemente sind unzerlegbar, da sie die Länge -2 haben. Das von ihnen

aufgespannte Untergitter sei N. Ist $1 \leq k \leq 3$ die Anzahl der Kanten, die mit f inzident sind, so zerfallen sie in genau k Klassen $C_1', \ldots, C_k'$. Wir zerlegen nun f in unzerlegbare Vektoren $f_1, \ldots, f_l$. Ist ein $f_i$ von der Form $f_i = \pm f + x$ mit $x \in N$, so gehört $f_i$ zu allen k Klassen. Denn man rechnet nach, daß für jedes $\nu$ die Bedingung, daß $\pm f + x$ orthogonal zu allen Vektoren einer Klasse $C_\nu'$ ist, zu einem Gleichungssystem für die Koeffizienten einer Linearkombination der Basiselemente von N führt, das nicht lösbar ist. Also ist in diesem Fall M unzerlegbar. Andernfalls sind alle $f_i$ von der Form $\varphi_i f + x_i$, $\varphi_i = 0$ oder $|\varphi_i| > 1$ und $x_i \in N$, und für mindestens zwei gilt $|\varphi_i| > 1$. Sei $K_\nu$ das von den Vektoren aus $C_\nu$ aufgespannte Untergitter. Gibt es nun mindestens zwei Klassen $C_\nu$, dann können nicht alle $f_i$ mit $|\varphi_i| > 1$ in einer Klasse $C_\lambda$ sein, da sonst $f + x$ für $x \in N$ in $K_\lambda$ ist. Dann folgt aber $\sum_\nu \operatorname{rg}(K_\nu) \geq \operatorname{rg}(M) + 1$, ein Widerspruch.

Wir geben nun für einige dieser Gitter eine alternative Beschreibung. Für $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k+1}$ gilt:

$$\operatorname{disk}(M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k+1}) = 1 \text{ und } M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k+1} \cong \Phi_{8k},$$

wobei $\Phi_{8k}$ das unzerlegbare negativ definite gerade Gitter

$$\Phi_{8k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{8k}) \in \mathbb{Q}^{8k} \mid 2x_i \in \mathbb{Z},\ x_i - x_j \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{8k} x_i \in 2\mathbb{Z}\}$$

mit der Bilinearform $b(x,y) = -\sum_{i=1}^{8k} x_i y_i$ ist (vgl. [S1], V, 1.4.3).

Es gilt $\Phi_8 = E_8$. Eine Basis von $\Phi_{8k}$ mit dem Dynkindiagramm von $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k+1}$ erhält man folgendermaßen: Sei $\{e_1, \ldots, e_{8k}\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{Q}^{8k}$. Wir setzen:

$$a_1 = e_1 + e_{8k},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \dots + e_{4k-2}) - \frac{1}{2}(e_{4k-1} + e_{4k} + \dots + e_{8k}),$$

$$a_i = e_{i-1} - e_{i-2} \quad \text{für } 3 \leq i \leq 8k.$$

Dann hat $\{a_i\}$ das Dynkindiagramm von Abbildung 6 und $\{a_i\}$ ist eine Basis von $\Phi_{8k}$, da $\{a_i\}$ Basis eines Untergitters L von $\Phi_{8k}$ vom Index

$$\left| \frac{\text{disk } (L)}{\text{disk } (\Phi_{8k})} \right|^{\frac{1}{2}} = 1$$

ist.

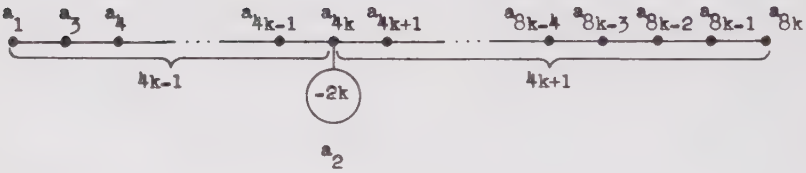



Abbildung 6

Die folgenden Konstruktionen sind Verallgemeinerungen gewisser Konstruktionen von [B1], Ch. VI, §4.

Sei V die Hyperebene von $\mathbb{Q}^{8k}$, die von den Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_{8k-1}$ aufgespannt wird. Dann gilt:

$$M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} = V \cap \Phi_{8k}, \quad \text{disk } (M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k}) = -2k,$$

$$M^{1,0,0}_{2,3,4} = E_7 .$$

Für den Vektor

$$\tilde{a} = \tilde{a}\,(M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k}) = 2a_1 + 2a_2 + \sum_{i=3}^{4k} i a_i + \sum_{i=4k+1}^{8k-1} (8k-i)a_i$$

gilt

$$b(\tilde{a},\tilde{a}) = -2,\ b(\tilde{a},a_1) = -1 \text{ und } b(\tilde{a},a_i) = 0 \text{ für } 1 < i \leq 8k-1 .$$

Sei V' die Hyperebene von $\mathbb{Q}^{8k}$, die von den Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_{8k-2}$ aufgespannt wird. Dann gilt:

$$M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k-1} = V' \cap \Phi_{8k}, \quad \text{disk}\,(M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k-1}) = 4k-1,$$

$$M^{1,0,0}_{2,3,3} = E_6 .$$

Für den Vektor

$$\tilde{a} = \tilde{a}\,(M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k-1}) = a_1 + 2a_2 + \sum_{i=2}^{4k} (i-1)a_i + \sum_{i=4k+1}^{8k-2} (8k-i-1)a_i$$

gilt

$$b(\tilde{a},\tilde{a}) = -2,\ b(\tilde{a},a_2) = -1 \text{ und } b(\tilde{a},a_i) = 0 \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant 8k-2,\ i \neq 2.$$

Bemerkung:

Es läßt sich zeigen, daß es im Fall $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k+1}$, $k > 1$, im Gegensatz zum Fall $k = 1$ keinen Vektor $\tilde{a}$ mit $b(\tilde{a},\tilde{a}) = -2$, $b(\tilde{a},a_{8k}) = -1$ und $b(\tilde{a},a_i) = 0$ für $1 \leqslant i < 8k$ gibt. (Im Fall $k = 1$ erfüllt der Vektor

$$\tilde{a} = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 6a_4 + 5a_5 + 4a_6 + 3a_7 + 2a_8$$

diese Bedingungen.)

Die Vektoren $\tilde{a}\,(E_6)$, $\tilde{a}\,(E_7)$ und $\tilde{a}\,(E_8)$ sind gerade die größten Wurzeln bezüglich der angegebenen Basen der einzelnen Gitter, wenn man diese Basen als Systeme von einfachen positiven Wurzeln betrachtet.

## 2.2 Die Analyse der quadratischen Formen

Im folgenden werden die quadratischen Formen der Singularitäten von Theorem 1.1 näher beschrieben. Wir geben jeweils eine bestimmte Aufspaltung in hyperbolische Ebenen und gewisse andere quadratische Formen an, die sich aus der Gestalt des Dynkindiagramms nach Abbildung 1 und Tabelle 1a ergibt. Da es sich aber im allgemeinen um indefinite Formen handelt, ist eine solche Zerlegung natürlich nicht eindeutig. Bei Benutzung der Diagramme nach Tabelle 1b kommt man im allgemeinen zu anderen Zerlegungen, allerdings nicht bei Benutzung der Diagramme von Theorem 1.2.

Zunächst läßt sich eine allgemeine Formel für die Diskriminante der quadratischen Form mit dem Dynkindiagramm von Theorem 1.1 angeben.

Satz 1:

Für den Rang und die Diskriminante der quadratischen Form mit dem Dynkindiagramm $T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y)$ (die wir mit dem gleichen Symbol bezeichnen) gilt:

$$rg\,(T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y)) = p+q+r+s+2t+u+2v+w+2x+y-2\ ,$$

$$\begin{aligned} disk\,(T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y)) &= (-1)^{\xi-1}(1-s)\cdot \\ &\Big\{(1-u)\Big[(1-w)\Big(pqr-(y+1)(pq+pr+qr)\Big)+\Big(w-2x(1-w)\Big)(q+r)(p-y-1)\Big]+ \\ &+4\Big(u-2v(1-u)\Big)\Big[(1-w)\Big(pq-(y+1)(p+q)\Big)+\Big(w-2x(1-w)\Big)(p-y-1)\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

wobei $\xi = p+q+r+s+t+u+v+w+x$ .

**Beweis:**

Die Formel für die Diskriminante leitet man wie bei Satz 2.1.1 her. Für die Rechnungen werden dabei die Tatsache, daß

$$\text{disk}\,(T(p,q,r,1,t,u,v,w,x,y)) = 0$$

ist (vgl. Umformung 1) in diesem Kapitel), und die Verschiebungen II b) → c), III b) → a) und IV b) → a) von Abbildung 3 benutzt. Im letzten Fall ist noch eine zusätzliche Transformation nötig: Das Dynkindiagramm von Abbildung 7a wird durch die Transformation

$$f_\kappa = (-1)^k(e_\kappa - e_{\lambda_1} + e_{\lambda_2} - e_{\lambda_3} + \ldots + (-1)^k e_{\lambda_k}) ,$$

$$f_j = e_j \quad \text{für } j \neq \kappa$$

in das Dynkindiagramm von Abbildung 7b umgeformt.

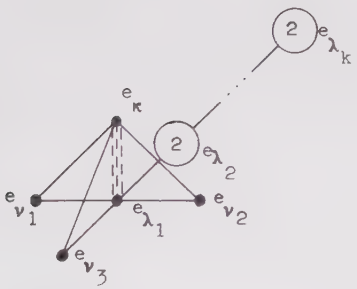



Abbildung 7a

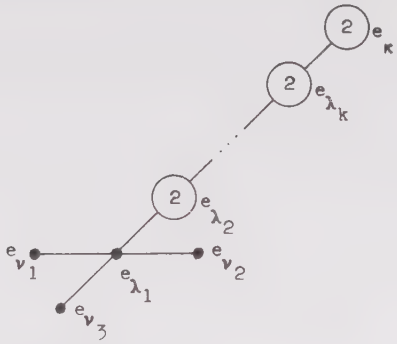



Abbildung 7b

Die genauere Analyse der quadratischen Formen beruht auf dem im folgenden beschriebenen Abspalten von hyperbolischen Ebenen. Es sei L ein Gitter mit einem Dynkindiagramm G zu einer Basis $\{e_1,\ldots,e_\mu\}$.

1) G besitze einen Untergraphen der Form von Abbildung 8a oder 8b.

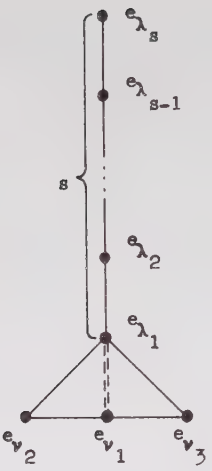



Abbildung 8a

$s \geq 1$

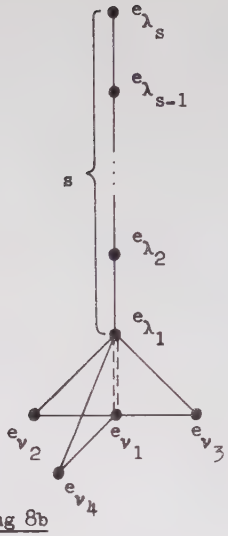



Abbildung 8b

Dabei seien alle Ecken außer eventuell $e_{\nu_2}$, $e_{\nu_3}$, $e_{\nu_4}$ in G mit keinen weiteren Ecken verbunden. Wir setzen:

$$f_{\lambda_1} = - e_{\lambda_1} + e_{\nu_1} ,$$

$$f_{\lambda_2} = - e_{\lambda_2} + f_{\lambda_1} \qquad (\text{falls } s > 1) ,$$

$$f_{\lambda_3} = e_{\lambda_3} + f_{\lambda_1} \qquad (\text{falls } s > 2) ,$$

$$f_j = e_j \qquad \text{für } j \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 ,$$

$$L' = \sum_{j \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_s} \mathbb{Z} f_j .$$

Dann gilt zunächst für $s = 1$: $f_{\lambda_1} \in \operatorname{rad} L$. Im Fall $s = 2$ sind $f_{\lambda_1}$, $f_{\lambda_2}$ isotrope Vektoren mit $b(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) = 1$,

$$U = \mathbb{Z} f_{\lambda_1} + \mathbb{Z} f_{\lambda_2}$$

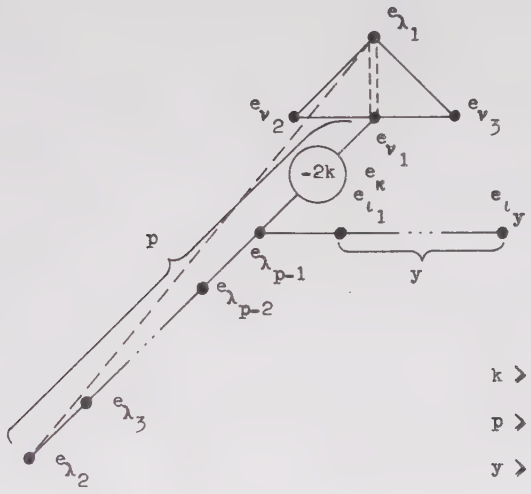
ist eine unimodulare hyperbolische Ebene und es gilt

$$L = L' \oplus U.$$

Schließlich gilt für $s \geq 3$:

$$\sum_{j=3}^{s} \mathbb{Z} f_{\lambda_j} \cong A_{s-2}, \quad L = L' \oplus U \oplus A_{s-2}.$$

2) G besitze einen Untergraphen der Form von Abbildung 9a.




$k \geq 1$,

$p \geq 5$,

$y \geq 0$

Abbildung 9a

Dabei seien die Ecken $e_{\lambda_1}$, $e_{\lambda_2}$, $e_{\lambda_3}$, $e_\kappa$ und $e_{\nu_1}$ in G mit keinen weiteren Ecken verbunden und für eine Ecke $e_i \in G$, die verschieden von den gezeichneten Ecken ist, gelte

$$\sum_{j=4}^{p-1} b(e_i, e_{\lambda_j}) = 0.$$

Wir setzen:

$$f_{\lambda_1} = - e_{\lambda_1} + e_{\nu_1},$$

$$f_{\lambda_2} = e_{\lambda_2} + f_{\lambda_1},$$

$$f_{\lambda_3} = \begin{cases} -e_{\lambda_3} + f_{\lambda_1} - e_{\lambda_4} - \dots - e_{\lambda_{p-1}} & \text{falls } y = 0, \\ -e_{\lambda_3} + f_{\lambda_1} - e_{\lambda_4} - \dots - e_{\lambda_{p-1}} - e_{\iota_1} - \dots - e_{\iota_y} & \text{falls } y > 0, \end{cases}$$

$$f_\kappa = e_\kappa - f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2},$$

$$f_j = e_j \quad \text{für } j \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \kappa,$$

$$L' = \sum_{j \neq \lambda_1, \lambda_2} \mathbb{Z} f_j,$$

$$U = \mathbb{Z} f_{\lambda_1} + \mathbb{Z} f_{\lambda_2}.$$

Dann gilt: $f_{\lambda_1}$ und $f_{\lambda_2}$ sind isotrope Vektoren mit $b(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) = 1$, U ist also eine unimodulare hyperbolische Ebene und

$$L = L' \oplus U.$$

Der Untergraph zu $f_{\lambda_3}, \dots, f_{\lambda_{p-1}}, f_\kappa, f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, f_{\nu_3}, f_{\iota_1}, \dots, f_{\iota_y}$ des Dynkindiagramms von L' zur Basis $\{f_j \mid 1 \leq j \leq \mu, j \neq \lambda_1, \lambda_2\}$ ist in Abbildung 9b dargestellt.

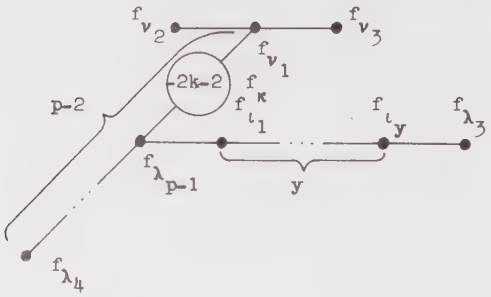
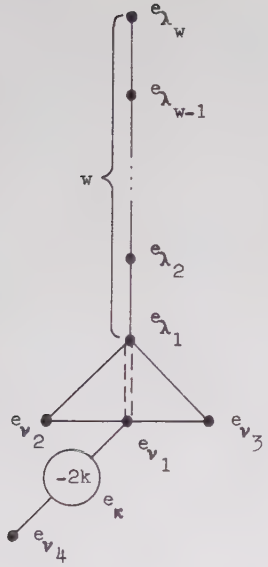



Abbildung 9b

3) G besitze einen Untergraphen der Form von Abbildung 10a.




$w \geq 2$,

$k \geq 1$

Abbildung 10a

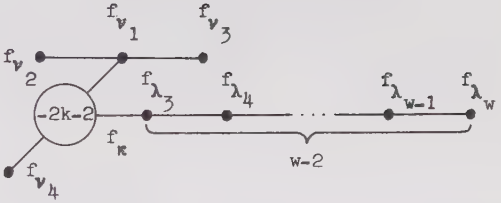



Abbildung 10b

Dabei seien alle Ecken außer eventuell $e_{\nu_2}$, $e_{\nu_3}$ und $e_{\nu_4}$ in G mit keinen weiteren Ecken verbunden. Die Ecke $e_{\nu_4}$ kann fehlen. Wir setzen:

$$f_{\lambda_1} = -e_{\lambda_1} + e_{\nu_1},$$

$$f_{\lambda_2} = -e_{\lambda_2} + f_{\lambda_1},$$

$$f_{\lambda_3} = e_{\lambda_3} + f_{\lambda_1} \quad \text{(falls } w > 2\text{)},$$

$$f_\kappa = e_\kappa - f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2},$$

$$f_j = e_j \quad \text{für } j \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \kappa,$$

$$L' = \sum_{j \neq \lambda_1, \lambda_2} \mathbb{Z} f_j,$$

$$U = \mathbb{Z} f_{\lambda_1} + \mathbb{Z} f_{\lambda_2}.$$

Dann sind $f_{\lambda_1}$ und $f_{\lambda_2}$ wieder isotrope Vektoren mit $b(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) = 1$, U ist also eine unimodulare hyperbolische Ebene und es gilt

$$L = L' \oplus U .$$

Der Untergraph zu $f_{\nu_1}$, $f_{\nu_2}$, $f_{\nu_3}$, $f_\kappa$ (und $f_{\lambda_3}$, ..., $f_{\lambda_w}$ falls $w > 2$) des Dynkindiagramms von $L'$ zur Basis $\{f_j \mid 1 \leq j \leq \mu,\ j \neq \lambda_1, \lambda_2\}$ ist in Abbildung 10b dargestellt.

4) G besitze einen Untergraphen der Form von Abbildung 11.

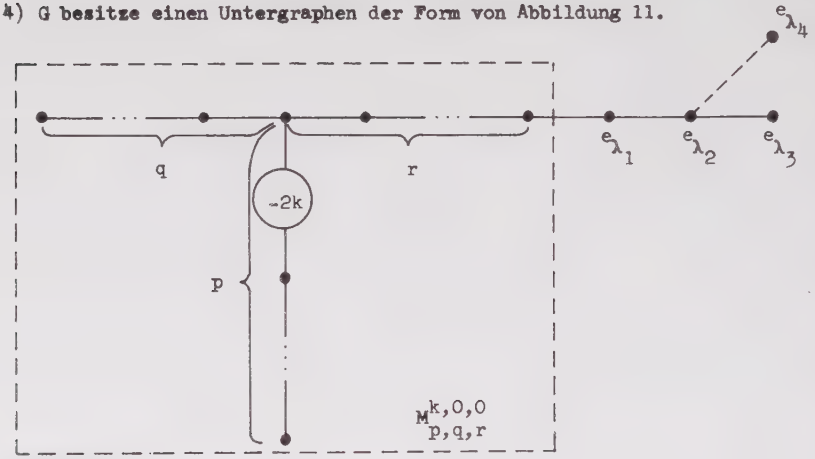



Abbildung 11

Dabei seien alle Ecken außer eventuell $e_{\lambda_3}$ und $e_{\lambda_4}$ in G mit keinen weiteren Ecken verbunden. Das Quadrupel (k,p,q,r) darf folgende Werte annehmen:

$$(1,2,3,5),\ (1,3,3,2),\ (k,2,4k,4k-1),$$

wobei $k \geq 1$. Es sei $\tilde{a}$ der für das jeweilige Gitter $M^{k,0,0}_{p,q,r}$ in 2.1 definierte Vektor. Wir setzen:

$$f_{\lambda_1} = e_{\lambda_1} + \tilde{a} \ ,$$

$$f_{\lambda_2} = e_{\lambda_2} + f_{\lambda_1} \ ,$$

$$f_{\lambda_3} = e_{\lambda_3} - f_{\lambda_1} \ ,$$

$$f_{\lambda_4} = e_{\lambda_4} + f_{\lambda_1} ,$$

$$f_j = e_j \qquad \text{für } j \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \quad ,$$

$$U = \mathbb{Z} f_{\lambda_1} + \mathbb{Z} f_{\lambda_2} \quad .$$

L' sei das Gitter, das von $f_{\lambda_3}$, $f_{\lambda_4}$ und den Ecken von G, die nicht zu dem obigen Untergraphen gehören, aufgespannt wird. Das Dynkindiagramm von L' zur Basis $\{f_j \mid f_j \in L'\}$ ist der Untergraph von G, der entsteht, wenn man aus G den Untergraphen von Abbildung 11 bis auf die Ecken $f_{\lambda_3}$ und $f_{\lambda_4}$ entfernt. Wieder sind $f_{\lambda_1}$ und $f_{\lambda_2}$ isotrope Vektoren mit $b(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) = 1$, U ist eine unimodulare hyperbolische Ebene und es gilt:

$$L = M^{k,0,0}_{p,q,r} \oplus U \oplus L' \quad .$$

(Die Ecke $e_{\lambda_4}$ oder die beiden Ecken $e_{\lambda_3}$ und $e_{\lambda_4}$ können auch fehlen. Im letzteren Fall ist dann

$$L = M^{k,0,0}_{p,q,r} \oplus U \quad .$$

Fehlen $e_{\lambda_2}$, $e_{\lambda_3}$ und $e_{\lambda_4}$, so ist $f_{\lambda_1} \in \operatorname{rad} L$.)

Wenn man zuerst Verschiebungen gemäß Abbildung 3 (Kap. 1) und anschliessend die Transformationen 1) - 4) in dieser Reihenfolge auf die Dynkindiagramme von Tabelle 1a anwendet, so erhält man die folgende Beschreibung der quadratischen Formen der betrachteten Singularitäten.

Theorem 1:

Die quadratischen Formen aller Singularitäten von Theorem 1.1 haben die in Tabelle 3 angegebenen Ränge, Diskriminanten und Signaturen. Sie lassen sich wie in Tabelle 3 beschrieben als orthogonale direkte Summen von unimodularen hyperbolischen Ebenen U, Nullformen O vom Rang 1, den Gittern $A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$ und $E_8$ und Gittern $M^{s,t,u}_{p,q,r}$, die die Voraussetz-

zungen von Satz 2.1.3 (i) oder (iii) erfüllen, darstellen.

Zur Notation in Tabelle 3 vgl. Kap. 0.1. Sofern nicht anders angegeben, gelten für die Zahlen k,l,i,j, die in den Indizes der Singularitäten(klassen) auftreten, die Einschränkungen von Tabelle 1a. Die Zahl m ist die Zahl der Moduln. Mit $\mu$ wird die Milnorzahl der jeweiligen Singularität, also auch der Rang der entsprechenden quadratischen Form bezeichnet. Alle Gitter $M^{s,t,u}_{p,q,r}$, die unter den Fall (iii) von Satz 2.1.3 fallen, sind mit (*) gekennzeichnet. Alle anderen Gitter $M^{s,t,u}_{p,q,r}$, die in der Tabelle auftreten, erfüllen die Voraussetzung von Fall (i), sind also nicht entartet, negativ definit und unzerlegbar.

Bemerkung:

Das Gitter $V \cap \Phi_{8k}$ von Kap. 2.1 tritt bei der X- und Z-Serie auf, das Gitter $V' \cap \Phi_{8k}$ bei $W_{12(k-1)+6}$. Aus der Klassifikation der ganzzahligen quadratischen Formen der Diskriminante 1 (vgl. z.B. [S1], Ch.V) folgt, daß überall

$$lE_8 \oplus U$$

ersetzt werden kann durch

$$(l-k)E_8 \oplus \Phi_{8k} \oplus U$$

für $1 \leq k \leq l$.

Für viele Singularitäten sind die quadratischen Formen schon durch Rang, Diskriminante, Signatur und die Bedingung, daß sie gerade sind, bestimmt, d.h. es gibt bis auf Äquivalenz über $\mathbb{Z}$ nur eine Form mit den vorgegebenen Invarianten. Es gilt zum Beispiel der folgende Satz:

Tabelle 3

| Singularität | m | μ | Diskriminante | $\mu_0$ | $\mu_+$ | Quadratische Form |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_k$ | 0 | k | $(-1)^k(k+1)$ | 0 | 0 | $A_k$ |
| $D_k$ | 0 | k | $(-1)^k 4$ | 0 | 0 | $D_k$ |
| $J_{21+1,i}$ | 21 | 12l+4+i | $(-1)^i 4$ | 0 | 21 | $1E_8 \oplus D_{4+i} \oplus 21U$ |
| $J_{21+2,0}$ | 21+1 | 12l+10 | 0 | 2 | 21 | $(1+1)E_8 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 21U$ |
| $J_{21+2,i}^{(i\geq 1)}$ | 21+1 | 12l+10+i | 0 | 1 | 21+1 | $(1+1)E_8 \oplus (i>1 : A_{i-1}) \oplus 0 \oplus (21+1)U$ |
| $E_{12l+6}$ | 21 | 12l+6 | 3 | 0 | 21 | $1E_8 \oplus E_6 \oplus 21U$ |
| $E_{12l+12}$ | 21+1 | 12l+12 | 1 | 0 | 2(1+1) | $(1+1)E_8 \oplus 2(1+1)U$ |
| $E_{12l+7}$ | 21 | 12l+7 | -2 | 0 | 21 | $1E_8 \oplus E_7 \oplus 21U$ |
| $E_{12l+13}$ | 21+1 | 12l+13 | -2 | 0 | 2(1+1) | $(1+1)E_8 \oplus A_1 \oplus 2(1+1)U$ |
| $E_{12l+8}$ | 21 | 12l+8 | 1 | 0 | 21 | $(1+1)E_8 \oplus 21U$ |
| $E_{12l+14}$ | 21+1 | 12l+14 | 3 | 0 | 2(1+1) | $(1+1)E_8 \oplus A_2 \oplus 2(1+1)U$ |
| $X_{k,0}$ | 3k-2 | 12k-3 | 0 | 2 | 2(k-1) | $M_{2,4k-1,4k}^{k,0,0} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 2(k-1)U$ |
| $X_{k,i}$ $(i\geq 1)$ | 3k-2 | 12k-3+i | 0 | 1 | 2k-1 | $M_{2,4k-1,4k}^{k,0,0} \oplus (i>1 : A_{i-1}) \oplus 0 \oplus (2k-1)U$ |

Tabelle 3 (Fortsetzung)

| Singularität | m | μ | Diskriminante | $\mu_0$ | $\mu_+$ | Quadratische Form |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y^k_{i,j}$ | 3k-2 | 12k-3+i+j | 0 | 1 | 2k-1 | $M^{k,0,0\ (*)}_{2,4k+j,4k+i} \oplus 0 \oplus 2(k-1)U$ |
| $Z^k_{21-1,i}$ | 3k+21-3 | 12k+121-9+i | $(-1)^{i+1}8k$ | 0 | 2(k+1-1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus (1-1)E_8 \oplus D_{4+i} \oplus 2(k+1-1)U$ |
| $Z^k_{21,0}$ | 3k+21-2 | 12k+121-3 | 0 | 2 | 2(k+1-1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus 1E_8 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 2(k+1-1)U$ |
| $Z^k_{21,i}$ $(i\geqslant 1)$ | 3k+21-2 | 12k+121-3+i | 0 | 1 | 2(k+1)-1 | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus 1E_8 \oplus (i>1 : A_{i-1}) \oplus 0 \oplus (2(k+1)-1)U$ |
| $Z^k_{12k+121-7}$ | 3k+21-3 | 12k+121-7 | -6k | 0 | 2(k+1-1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus (1-1)E_8 \oplus E_6 \oplus 2(k+1-1)U$ |
| $Z^k_{12k+121-1}$ | 3k+21-2 | 12k+121-1 | -2k | 0 | 2(k+1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus 1E_8 \oplus 2(k+1)U$ |
| $Z^k_{12k+121-6}$ | 3k+21-3 | 12k+121-6 | 4k | 0 | 2(k+1-1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus (1-1)E_8 \oplus E_7 \oplus 2(k+1-1)U$ |
| $Z^k_{12k+121}$ | 3k+21-2 | 12k+121 | 4k | 0 | 2(k+1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus 1E_8 \oplus A_1 \oplus 2(k+1)U$ |
| $Z^k_{12k+121-5}$ | 3k+21-3 | 12k+121-5 | -2k | 0 | 2(k+1-1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus 1E_8 \oplus 2(k+1-1)U$ |
| $Z^k_{12k+121+1}$ | 3k+21-2 | 12k+121+1 | -6k | 0 | 2(k+1) | $M^{k,0,0}_{2,4k-1,4k} \oplus 1E_8 \oplus A_2 \oplus 2(k+1)U$ |
| $W_{12k}$ | 3k-2 | 12k | 4k+1 | 0 | 2k | $M^{k,0,0\ (*)}_{2,4k+1,4k+1} \oplus (2k-1)U$ |
| $W_{12k+1}$ | 3k-2 | 12k+1 | -6k-2 | 0 | 2k | $M^{k,0,0\ (*)}_{2,4k+1,4k+2} \oplus (2k-1)U$ |
| $W_{k,0}$ | 3k-1 | 12k+3 | -8k-4 | 0 | 2k | $A_{8k+3} \oplus 2kU$ |

Tabelle 3 (Fortsetzung)

| Singularität | m | μ | Diskriminante | $\mu_0$ | $\mu_+$ | Quadratische Form |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_{k,i}$ $(i\geq 1)$ | 3k-1 | 12k+3+i | $(-1)^{i+1}(8k+4)$ | 0 | 2k | $M^{k+1,0,0}_{i+1,4k+2,4k+2} \oplus 2kU$ |
| $W^{\#}_{k,i}$ $(i\geq 1)$ | 3k-1 | 12k+3+i | $(-1)^{i+1}(8k+4+i)$ | 0 | 2k | $A_{8k+3+i} \oplus 2kU$ |
| $W_{12k+5}$ | 3k-1 | 12k+5 | -6k-4 | 0 | 2k | $M^{k+1,0,0}_{2,4k+2,4k+3} \oplus 2kU$ |
| $W_{12k+6}$ | 3k-1 | 12k+6 | 4k+3 | 0 | 2k | $M^{k+1,0,0}_{2,4k+3,4k+3} \oplus 2kU$ |
| $T_{i,j,k}$ | 1 | i+j+k-1 | 0 | 2 | 0 | $E_{i+j+k-3} \oplus 0 \oplus 0$ für $\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\frac{1}{k}=1$ |
| | | | | 1 | 1 | $M^{1,0,0\ (*)}_{i,j,k} \oplus 0$ für $\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\frac{1}{k}<1$ |
| $Q_{21,i}$ | 21 | 12i+2+i | $(-1)^i 12$ | 0 | 21 | $E_6 \oplus (1-i)E_8 \oplus D_{4+i} \oplus 21U$ |
| $Q_{21+1,0}$ | 21+1 | 12i+8 | 0 | 2 | 21 | $E_6 \oplus 1E_8 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 21U$ |
| $Q_{21+1,i}$ $(i\geq 1)$ | 21+1 | 12i+8+i | 0 | 1 | 21+1 | $E_6 \oplus 1E_8 \oplus (i>1 : A_{i-1}) \oplus 0 \oplus (21+1)U$ |
| $Q_{12i+4}$ | 21 | 12i+4 | 9 | 0 | 21 | $2E_6 \oplus (1-i)E_8 \oplus 21U$ |
| $Q_{12i+10}$ | 21+1 | 12i+10 | 3 | 0 | 2(i+1) | $E_6 \oplus 1E_8 \oplus 2(i+1)U$ |
| $Q_{12i+5}$ | 21 | 12i+5 | -6 | 0 | 21 | $E_6 \oplus (1-i)E_8 \oplus E_7 \oplus 21U$ |
| $Q_{12i+11}$ | 21+1 | 12i+11 | -6 | 0 | 2(i+1) | $E_6 \oplus 1E_8 \oplus A_1 \oplus 2(i+1)U$ |

Tabelle 3 (Fortsetzung)

| Singularität | m | μ | Diskriminante | $\mu_0$ | $\mu_+$ | Quadratische Form |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{12l+6}$ | 21 | 12l+6 | 3 | 0 | 21 | $E_6 \oplus 1E_8 \oplus 21U$ |
| $Q_{12l+12}$ | 21+1 | 12l+12 | 9 | 0 | 2(l+1) | $E_6 \oplus 1E_8 \oplus A_2 \oplus 2(l+1)U$ |
| $S_{12k-1}$ | 3k-2 | 12k-1 | -8k | 0 | 2k | $M^{k,0,0\ (*)}_{3,4k,4k} \oplus (2k-1)U$ |
| $S_{12k}$ | 3k-2 | 12k | 12k+1 | 0 | 2k | $M^{k,0,0\ (*)}_{3,4k,4k+1} \oplus (2k-1)U$ |
| $S_{k,0}$ | 3k-1 | 12k+2 | 16k+4 | 0 | 2k | $A_{8k+1} \oplus A_1 \oplus 2kU$ |
| $S_{k,i}$ $(i\geq 1)$ | 3k-1 | 12k+2+i | $(-1)^i(16k+4)$ | 0 | 2k | $M^{k+1,1,0}_{i+1,4k+1,4k+1} \oplus 2kU$ |
| $S^{\#}_{k,i}$ $(i\geq 1)$ | 3k-1 | 12k+2+i | $(-1)^i(16k+4+2i)$ | 0 | 2k | $A_{8k+1+i} \oplus A_1 \oplus 2kU$ |
| $S_{12k+4}$ | 3k-1 | 12k+4 | 12k+5 | 0 | 2k | $M^{k+1,0,0}_{3,4k+1,4k+2} \oplus 2kU$ |
| $S_{12k+5}$ | 3k-1 | 12k+5 | -8k-4 | 0 | 2k | $M^{k+1,0,0}_{3,4k+2,4k+2} \oplus 2kU$ |
| $U_{12k}$ | 4k-3 | 12k | $(3k+1)^2$ | 0 | 2k | $M^{k,0,k-1\ (*)}_{k+3,3k+1,3k+1} \oplus (2k-1)U$ |
| $U_{k,i}$ $(i\geq 0)$ | 4k-2 | 12k+2+i | $(-1)^i(2k+1)(6k+3+i)$ | 0 | 2k | $A_{6k+2+i} \oplus A_{2k} \oplus 2kU$ |
| $U_{12k+4}$ | 4k-2 | 12k+4 | $(3k+2)^2$ | 0 | 2k | $M^{k+1,0,k}_{k+2,3k+2,3k+2} \oplus 2kU$ |

Satz 2:

Sei $\mu > 3$, $\mu_0 = 0$, $\mu_+$, $\mu_- > 0$, p eine Primzahl, und es sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $d = p$ (oder $d = 2p$, $p \neq 2$, falls $\mu \equiv 1\ (2)$ ),

(ii) $d = p^2$ (oder $d = 2p^2$, $p \neq 2$, falls $\mu \equiv 1\ (2)$ )

und $\mu_- - \mu_+ \not\equiv 0\ (8)$.

Dann sind alle nicht entarteten ganzzahligen geraden Gitter mit Rang $\mu$, Diskriminante d und Signatur $(\mu_+,\mu_-)$ isomorph (isometrisch).

Beweis:

Nach dem Satz von Hasse-Minkowski, der Produktformel für die Hasse-Witt-Invarianten und [W3], Ch.3,6(95), sind alle solchen Gitter über $\mathbb{Q}$ isomorph. Ein Gitter L mit den vorgegebenen Invarianten ist aber ein maximales gerades Gitter auf $L_{\mathbb{Q}}$. Dies ist klar im Fall (i), im Fall (ii) müßte es sonst in einem geraden Gitter der Diskriminante 1, vom Rang $\mu$ und von der Signatur $(\mu_+,\mu_-)$ enthalten sein. Wegen $\mu_- - \mu_+ \not\equiv 0\ (8)$ gibt es ein solches Gitter aber nicht. Dann ist auch das Gitter $L_p = L \otimes \mathbb{Z}_p$ maximal auf $V_p = L \otimes \mathbb{Q}_p$, alle maximalen Gitter auf $V_p$ sind aber über $\mathbb{Z}_p$ isomorph ([01], 91:2). Unter den Voraussetzungen des Satzes fallen schließlich Geschlecht, Spinorgeschlecht und Klasse zusammen (vgl. z.B. [K2], §24).

Der Satz läßt sich insbesondere auf die quadratischen Formen aller bimodularen exzeptionellen Singularitäten außer $S_{17}$ anwenden. Im Fall $S_{17}$ läßt sich zeigen, daß es bis auf Isomorphie über $\mathbb{Z}$ und über $\mathbb{Q}$ genau zwei gerade Gitter mit Rang 17, Diskriminante -12 und Signatur (2,15) gibt, von denen aber nur eins das Gitter von $S_{16}$ als Untergitter enthält.

Für eine andere Beschreibung der quadratischen Formen der bimodularen Singularitäten vgl. Kap. 4.

## 3. Eine Charakterisierung der Monodromiegruppen

Wir leiten in diesem Kapitel einen Satz her, der eine arithmetische Beschreibung der Monodromiegruppen der betrachteten Singularitäten liefert.

L sei im folgenden immer ein gerades Gitter mit Bilinearform b.

Definition 1:

Sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_\mu\}$ eine Basis von L mit $b(e_i, e_i) = -2$ für $1 \leq i \leq \mu$. Dann sei $\Gamma_L$ die Untergruppe von $O(L)$, die von den Spiegelungen $s_{e_i}$ erzeugt wird.

Ist L das Gitter einer Singularität und $\{e_i\}$ eine schwach ausgezeichnete Basis, dann ist $\Gamma_L$ die Monodromiegruppe der Singularität.

Definition 2:

Es sei $R_{-2}(L)$ die Untergruppe von $O(L)$, die von allen Spiegelungen $s_v$ mit $v \in L$ und $b(v,v) = -2$ erzeugt wird.

Wir führen nun in Anlehnung an [B2] noch zwei weitere Untergruppen von $O(L)$ ein. Sei $\overline{L} = L / \operatorname{rad} L$ das nicht entartete Gitter mit der durch b induzierten Bilinearform. Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$, $\overline{L}_K = \overline{L} \otimes K$ und $K^*$ die multiplikative Gruppe von K. Wir definieren die Spinornorm über K

$$\sigma'_K : \quad O(\overline{L}_K) \longrightarrow K^* / K^{*2}$$

wie folgt. Jedes Element $\overline{t} \in O(\overline{L}_K)$ läßt sich bekanntlich als Produkt von Spiegelungen darstellen:

$$\bar{t} = s_{v_1} \circ s_{v_2} \circ \dots \circ s_{v_r} .$$

Dann sei

$$\sigma'_K(\bar{t}) = \overline{(-\tfrac{1}{2} b(v_1,v_1))(-\tfrac{1}{2} b(v_2,v_2)) \dots (-\tfrac{1}{2} b(v_r,v_r))} \in K^*/K^{*2} .$$

(Dies ist die übliche Spinornorm (vgl. z.B. [E2]) für ein Gitter mit der symmetrischen Bilinearform -b. Die obige Definition ist unseren Zwecken angepaßt.) Für $K = \mathbb{R}$ gilt:

$$\sigma'_{\mathbb{R}}(\bar{t}) = \begin{cases} +1 & \text{falls } b(v_i,v_i) > 0 \text{ für eine gerade Anzahl von Indizes,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung $L \longrightarrow \bar{L}$ induziert eine kanonische Abbildung

$$\rho : O(L) \longrightarrow O(\bar{L}) .$$

Wenn wir $O(\bar{L})$ als Untergruppe von $O(\bar{L}_K)$ betrachten, erhalten wir einen Homomorphismus

$$\sigma_K : O(L) \longrightarrow K^*/K^{*2}$$

durch Komposition: $\sigma_K = \sigma'_K \circ \rho$. Wir nennen $\sigma_K(t)$ die rationale oder die reelle Spinornorm von $t \in O(L)$, je nachdem ob $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$.

Sei $L^\# = \mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z})$ der duale $\mathbb{Z}$-Modul,

$$\delta : L \longrightarrow L^\#$$

der natürliche Homomorphismus, der durch $\delta(v)(w) = b(v,w)$ definiert ist. Wir setzen

$$L^* = L^\#/\delta L .$$

Wenn L nicht entartet ist, ist $L^{\#}$ ein Gitter mit der durch b induzierten Bilinearform und $\delta L$ ein Untergitter von endlichem Index in $L^{\#}$. In diesem Fall ist also $L^{*}$ eine endliche abelsche Gruppe mit einer symmetrischen Bilinearform. Im allgemeinen Fall ist $L^{*}$ nur eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. $O(L)$ operiert auf $L^{\#}$ durch die duale Darstellung. Dadurch wird ein kanonischer Homomorphismus

$$\tau : \quad O(L) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(L^{*})$$

induziert.

Definition 3: (vgl. [B2])

$$G_K(L) = \ker \tau \cap \ker \sigma_K .$$

Wenn L nicht entartet ist, ist $G_{\mathbb{R}}(L)$ nach den Vorbemerkungen von endlichem Index in $O(L)$. Im entarteten Fall führt eine gegebene Spaltung

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}\, L \longrightarrow L \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \overline{L} \longrightarrow 0 \ , \ \text{d.h. } L = \overline{L} \oplus \mathrm{rad}\, L,$$

zu einer spaltenden exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{rad}\, L \otimes \overline{L}^{\#} \longrightarrow O(L) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} O(\overline{L}) \times O(\mathrm{rad}\, L) \longrightarrow 1 \ ,$$

wobei $1 \otimes \varphi \in \mathrm{rad}\, L \otimes \overline{L}^{\#}$ auf rad L trivial und auf $\overline{L}$ durch

$$1 \otimes \varphi(\overline{v}) = \overline{v} + \varphi(\overline{v})1$$

operiert. Für $G_K(L) \subset O(L)$ erhält man daraus aufgrund der obigen Definitionen die spaltende exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{rad}\, L \otimes \overline{L} \longrightarrow G_K(L) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} G_K(\overline{L}) \longrightarrow 1 \ , \qquad (1)$$

wobei $\overline{L}$ mittels $\delta$ als Untergitter von $\overline{L}^{\#}$ aufgefaßt wird (vgl. [B3]).

Für die definierten Untergruppen hat man offensichtlich folgende Inklusionen

$$\Gamma_L \subset R_{-2}(L) \subset G_{\mathbb{Q}}(L) \subset G_{\mathbb{R}}(L) \ .$$

Wir geben im folgenden Bedingungen dafür an, wann auch die umgekehrten Inklusionen gelten.

Definition 4:

Ein Gitter L heißt ein Gitter mit einer speziellen Basis, wenn eine Basis $\{e_1,e_2,\ldots,e_\mu\}$, $\mu \geq 3$, von L existiert, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $b(e_i,e_i) = -2$ für $1 < i < \mu$ .

(ii) $b(e_1,e_2) = 1$ ,

$b(e_1,e_i) = 0$ für $3 < i < \mu$ ,

$b(e_2,e_i) = b(e_3,e_i)$ für $2 < i < \mu$ .

(iii) Zu jedem Basisvektor $e_i$ mit $3 < i < \mu$ gibt es eine Folge von Basisvektoren $e_i = e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k} = e_3$ mit $3 < i_j < \mu$ und $b(e_{i_j},e_{i_{j+1}}) = 1$.

Eine solche Basis heißt dann eine spezielle Basis.

Das Gitter mit dem Dynkindiagramm $T(p,q,r,s,t,u,v,w,x,y)$ ist für $t \geq 1$ ein Gitter mit einer speziellen Basis und die zum Dynkindiagramm gehörige Basis ist bezüglich einer geeigneten Numerierung speziell.

Sei nun L ein Gitter mit einer speziellen Basis $\{e_1,e_2,\ldots,e_\mu\}$. Wir setzen

$$f_1 = -e_2 + e_3 \ ,$$

$$f_2 = - e_1 - e_2 + e_3 ,$$
$$U_1 = \mathbb{Z} f_1 + \mathbb{Z} f_2 ,$$
$$L' = \sum_{i=3}^{\mu} \mathbb{Z} e_i .$$

Dann sind $f_1$ und $f_2$ isotrope Vektoren mit $b(f_1,f_2) = 1$, $U_1$ ist eine unimodulare hyperbolische Ebene, und es gilt

$$L = L' \oplus U_1 .$$

Theorem 1:

Sei L ein gerades Gitter mit einer speziellen Basis $\{e_1,e_2,\dots,e_\mu\}$. Das Gitter $\overline{L}$ enthalte $A_6$ als Untergitter. Für

$$L' = \sum_{i=3}^{\mu} \mathbb{Z} e_i$$

gelte $L' = L'' \oplus U_2$ für eine unimodulare hyperbolische Ebene $U_2$, also $L = L'' \oplus U_2 \oplus U_1$. Sei $\Gamma_L$ die Untergruppe von $O(L)$, die von den Spiegelungen $s_{e_i}$, $1 \leq i \leq \mu$, erzeugt wird. Dann gilt:

$$\Gamma_L = R_{-2}(L) = G_{\mathbb{R}}(L) .$$

Beweis:

Für einen isotropen Vektor $f \in L$ und ein $w \in L$ mit $b(w,f) = 0$ sei $E_w^f$ die folgendermaßen definierte Eichler-(Siegel-)Transformation

$$E_w^f(x) = x + b(x,f)w - b(x,w)f - \frac{1}{2} b(w,w)b(x,f)f$$

für $x \in L$ (vgl. [E2], Kap.I, §3). Dann gilt für $w' \in L$ mit $b(w',f) = 0$

$$E_w^f \circ E_{w'}^f = E_{w+w'}^f \quad . \tag{2}$$

Sei U eine unimodulare hyperbolische Ebene mit Basis $\{g_1, g_2\}$, so daß $b(g_1,g_1) = b(g_2,g_2) = 0$, $b(g_1,g_2) = 1$ . Dann sei $\mathcal{E}(M)$ für ein beliebiges gerades Gitter M die Untergruppe von $O(M \oplus U)$, die von den Transformationen $E_w^{g_1}$, $E_w^{g_2}$ für beliebige $w \in M$ erzeugt wird.

a) Wir zeigen zunächst:

$$\mathcal{E}(L') \subset \Gamma_L \, .$$

$\mathcal{E}(L')$ wird von $E_{w_j}^{f_1}$ , $E_{w_j}^{f_2}$ erzeugt, wenn die $w_j$ eine Basis von L' durchlaufen. Für ein w mit $b(w,w) = 2\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, gilt außerdem

$$E_w^{f_i} = s_w \circ s_{w+\varepsilon f_i} \quad . \tag{3}$$

Es reicht daher zu zeigen, daß $e_j - f_i$ für $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{3,\dots,\mu\}$ durch Transformationen aus $\Gamma_L$ in einen Basisvektor $e_1$ überführbar ist. Nun gilt aber

$$e_3 - f_1 = e_2, \; e_3 - f_2 = e_1 + e_2, \; s_{e_1}(e_1 + e_2) = e_2 \, .$$

Jedes andere $e_j$ kann aber durch die folgende Folge von Spiegelungen in $e_3$ überführt werden, wobei $f_1$ und $f_2$ fest bleiben: Sei $e_j = e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k} = e_3$ eine Folge von Basisvektoren mit $b(e_{j_i}, e_{j_{i+1}}) = 1$, $3 \leq j_i \leq \mu$, $1 \leq i \leq k$. Dann gilt

$$s_{e_{j_{k-1}}} \circ s_{e_{j_k}} \circ \dots \circ s_{e_{j_2}} \circ s_{e_{j_3}} \circ s_{e_{j_1}} \circ s_{e_{j_2}}(e_j) = e_3 \, .$$

b) Sei $R_{\pm 2}(L)$ die Untergruppe von $O(L)$, die von allen Spiegelungen $s_v$ mit $b(v,v) = \pm 2$ erzeugt wird. Wir zeigen:

$$R_{\pm 2}(L) \subset O(U_1)\mathcal{E}(L') \quad .$$

Zunächst folgt aus [W2], 4.1, 5.4 und 5.3, daß

$$O(U_1 \oplus U_2) = O(U_1)\mathcal{E}(U_2) \quad .$$

Nach [W1], Theorem 1, operiert $O(U_1 \oplus U_2)$ transitiv auf primitiven Vektoren gleicher Länge. Ist nun w ein Vektor aus L mit $b(w,w) = 2\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, so gibt es also ein $t = t_1 \circ t_2 \in O(U_1)\mathcal{E}(U_2)$ mit $w' = t(w) = v + u_2$ mit $v \in L''$, $u_2 \in U_2$, wobei wir $O(U_1)\mathcal{E}(U_2)$ in natürlicher Weise als Untergruppe von $O(L)$ auffassen. Nach [E2], Kap.I, § 3(3.12) gilt

$$s_{w'} = E_{w'}^{f_2} \circ E_{\varepsilon w'}^{f_1} \circ E_{w'}^{f_2} \circ s_{f_1 + \varepsilon f_2} \in \mathcal{E}(L')O(U_1).$$

Aber

$$s_{w'} = s_{t(w)} = t \circ s_w \circ t^{-1} \quad .$$

Da $O(U_1)$ schließlich $\mathcal{E}(L')$ normalisiert und $\mathcal{E}(U_2) \subset \mathcal{E}(L')$, folgt die Behauptung.

c) Sei $R_{-2}^{+}(L) = R_{-2}(L) \cap O^{+}(L)$, $G_K^{+}(L) = G_K(L) \cap O^{+}(L)$ .
Wir zeigen:

$$G_{\mathbb{R}}^{+}(L) \subset R_{-2}^{+}(L) \quad .$$

Da $\bar{L}$ nach Voraussetzung $A_6$ als Untergitter enthält und wegen $L = L'' \oplus U_2 \oplus U_1$ der Wittindex von $\bar{L}_{\mathbb{R}}$ mindestens 2 ist, folgt aus [K4], Satz 4 und der Bemerkung nach Satz 4:

$$G_{\mathbb{Q}}^{+}(\bar{L}) \subset R_{-2}^{+}(\bar{L}) \quad .$$

Hat aber ein $t \in G^+_{\mathbb{R}}(\overline{L})$ über $\mathbb{Q}$ die Spinornorm $a\mathbb{Q}^{*2}$ mit quadratfreiem $a \in \mathbb{Z}$, so folgt $a = \pm 1$ aus [K4], Satz 2, und damit $t \in G^+_{\mathbb{Q}}(\overline{L})$. Also gilt

$$G^+_{\mathbb{R}}(\overline{L}) \subset R^+_{-2}(\overline{L}) .$$

Aufgrund der spaltenden exakten Sequenz (1) folgt die Behauptung, wenn wir noch gezeigt haben, daß rad $L \otimes \overline{L}$, aufgefaßt als Untergruppe von $O(L)$, in $R^+_{-2}(L)$ enthalten ist. Aus den Definitionen folgt aber, daß rad $L \otimes \overline{L}$ von den Transformationen $E^f_{\overline{v}}$ mit $f \in$ rad $L$, $\overline{v} \in \overline{L}$ erzeugt wird. Da nach Voraussetzung $L$ von Vektoren $v$ mit $b(v,v) = -2$ erzeugt wird, wird diese Untergruppe wegen (2) schon von Transformationen $E^f_{\overline{v}}$ mit $f \in$ rad $L$ und $\overline{v} \in \overline{L}$ mit $b(\overline{v},\overline{v}) = -2$ erzeugt. Wegen (3) liegen alle diese Elemente in $R^+_{-2}(L)$.

d) Da alle Elemente aus $\mathcal{E}(L')$ Determinante und Spinornorm 1 haben und dies aber nur für die Identität aus $O(U_1)$ gilt, folgt aus a) - c)

$$G^+_{\mathbb{R}}(L) \subset \mathcal{E}(L') \subset \Gamma_L .$$

Da die Spiegelungen Determinante -1 haben, folgt sofort

$$G_{\mathbb{R}}(L) \subset \Gamma_L ,$$

was zu zeigen war.

Korollar 1:

Für alle Singularitäten von Theorem 1.1, eventuell mit Ausnahme der Singularitäten $T_{i,j,k}$ mit $(i,j,k) \neq (2,3,6), (2,3,7), (2,4,4), (2,4,5), (3,3,3), (3,3,4)$, gilt: Bezeichnet $L$ das Gitter der Singularität und $\Gamma_L$ die Monodromiegruppe, so ist

$$\Gamma_L = R_{-2}(L) = G_{\mathbb{R}}(L) \quad .$$

Insbesondere ist die Monodromiegruppe nur vom Gitter abhängig und bei den nicht entarteten Gittern von endlichem Index in $O(L)$.

Beweis:

Nach Kap. 2 folgt, daß für die Gitter aller Singularitäten von Tabelle 1a mit $t > 1$ die Voraussetzungen von Theorem 1 erfüllt sind. Für die einfachen Singularitäten ist die Behauptung klar. Brieskorn hat die Behauptung schließlich für die angegebenen Singularitäten $T_{i,j,k}$ bewiesen (vgl. [B2], [B3]).

Bemerkung:

Für die in Korollar 1 ausgenommenen Singularitäten ist die Gültigkeit der Behauptung unklar. Ist $L_{i,j,k}$ das Gitter der Singularität $T_{i,j,k}$, wobei $(i,j,k)$ keines der sechs Tripel von Korollar 1 ist, so ist $\operatorname{rg}(\operatorname{rad} L) = 1$ und $\overline{L}_{i,j,k}$ hat die Signatur $(1,\mu-2)$ mit $\mu = i+j+k-1$. Nach [M1] ist für genügend großes $\mu$ die in [K4] benutzte Kongruenzuntergruppeneigenschaft in der Spingruppe von $\overline{L}_{i,j,k}$ nicht erfüllt. Nach [V1] ist außerdem $R_{-2}(L)$ für ein nicht entartetes unimodulares Gitter $L$ der Signatur $(1,n)$ mit $n > 19$ nicht mehr von endlichem Index in $O(L)$.

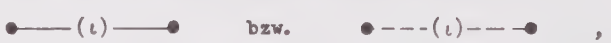
## 4. Dynkindiagramme der bimodularen Singularitäten

### 4.1 Schwach ausgezeichnete Basen

Für die bimodularen Singularitäten vereinfachen sich die Graphen von Kap. 1 erheblich. Man erhält aus Theorem 1.1 nach Anwendung von Transformationen gemäß Bemerkung 3) von Kap. 1 und von Operationen $\gamma_k$ (vgl. Kap. 0.2) und aus Theorem 1.2 das folgende Resultat:

Korollar 1:
Alle bimodularen Singularitäten besitzen eine schwach ausgezeichnete Basis mit einem Dynkindiagramm der Form $D'(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ (s. Abbildung 12), wobei die Werte $\kappa,\lambda;r,a,b,c,d$ in Tabelle 4a (für die 8 unendlichen Serien) und 4b (für die 14 exzeptionellen Singularitäten) aufgeführt sind.

In Abbildung 12 und den folgenden Abbildungen bedeutet




daß die beiden Ecken durch $\iota$ durchgezogene bzw. $\iota$ gestrichelte Kanten verbunden sind, wobei $\iota \in \{0,1\}$. Einem vorgegebenen Graphen vom Typ $D'(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ lassen sich, insbesondere für $\kappa = 1$, immer mehrere Quintupel $(r,a,b,c,d)$ zuordnen. In Tabelle 4a/b ist jeweils nur eine Möglichkeit angegeben.

Aus Kap. 2 ergibt sich das folgende Resultat:

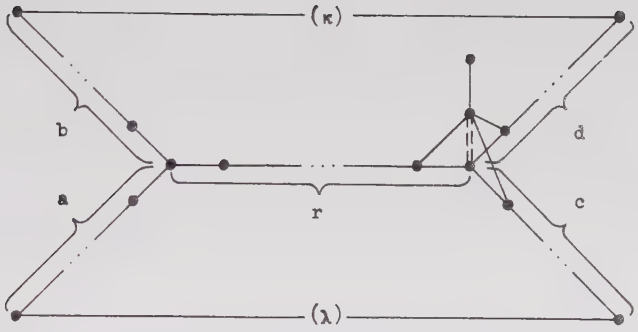



Abbildung 12: Der Graph $D'(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$

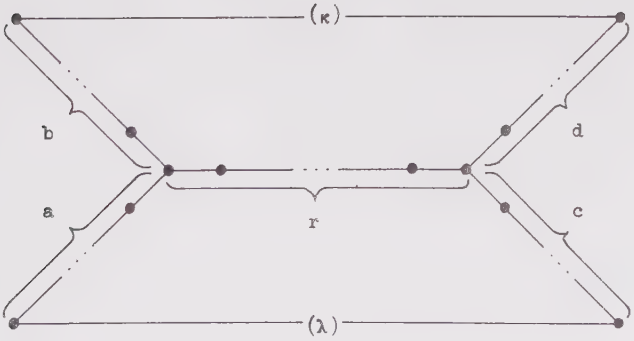



Abbildung 13: Der Graph $D(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$

Tabelle 4a

| Singularität | μ | Diskriminante | Dualer Graph | $\bar{a}$ $\bar{b}$ $\bar{c}$ $\bar{d}$ | κ λ | r | a b c d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{3,i}$ $(i\geq 0)$ | 16+i | $(-1)^i 4$ | $A_{1+i,****}$ | 2 2 2 3 | 0 0 | 9+i | 2 2 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 9 | 2+i 2 2 3 |
| $Z_{1,i}$ $(i\geq 0)$ | 15+i | $(-1)^{i+1} 8$ | $A_{1+i,****}$ | 2 2 2 4 | 0 0 | 7+i | 2 2 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 2+i 2 2 4 |
| $Q_{2,i}$ $(i\geq 0)$ | 14+i | $(-1)^i 12$ | $A_{1+i,****}$ | 2 2 2 5 | 0 0 | 6+i | 2 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 6 | 2+i 2 3 3 |
| $W_{1,i}$ $(i\geq 0)$ | 15+i | $(-1)^{i+1} 12$ | $A_{1+i,****}$ | 2 2 3 3 | 0 0 | 6+i | 2 2 2 5 |
| | | | | | 1 0 | 7 | 1+i 2 2 5 |
| $W^{\#}_{1,i}$ $(i\geq 1)$ | 15+i | $(-1)^{i+1}(12+i)$ | $A_{1+i,****}$ | 2 3 3 2 | 0 0 | 6 | 2+i 2 2 5 |
| | | | | | 1 0 | 7+i | 1 2 2 5 |
| $S_{1,i}$ $(i\geq 0)$ | 14+i | $(-1)^i 20$ | $A_{1+i,****}$ | 2 2 3 4 | 0 0 | 5+i | 2 2 3 4 |
| | | | | | 1 0 | 6 | 1+i 2 3 4 |
| $S^{\#}_{1,i}$ $(i\geq 1)$ | 14+i | $(-1)^i(20+21)$ | $A_{1+i,****}$ | 2 3 4 2 | 0 0 | 5 | 2+i 2 3 4 |
| | | | | | 1 0 | 6+i | 1 2 3 4 |
| $U_{1,i}$ $(i\geq 0)$ | 14+i | $(-1)^i(27+31)$ | $A_{1+i,****}$ | 2 3 3 3 | 1 0 | 5+i | 1 3 4 3 |
| | | | | | 1 0 | 5 | 1+i 3 4 3 |

Tabelle 4b

| Singularität | μ | Diskriminante | Dualer Graph | $\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}$ | κ λ | r | a | b c d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_{18}$ | 18 | 3 | $D_{4,***}$ | 2 2 3 | 0 0 | 10 | 3 | 2 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 9 | 3 | 3 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 5 | 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 6 | 5 | 3 3 3 |
| $E_{19}$ | 19 | -2 | $E_{6,**}$ | 2 2 3 | 0 0 | 11 | 3 | 2 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 10 | 4 | 2 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 9 | 4 | 3 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 8 | 5 | 2 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 5 | 3 2 4 |
| $E_{20}$ | 20 | 1 | $E_{8,*}$ | 2 2 3 | 0 0 | 12 | 3 | 2 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 10 | 5 | 2 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 9 | 5 | 3 2 3 |
| $Z_{17}$ | 17 | -6 | $D_{4,***}$ | 2 2 4 | 0 0 | 8 | 3 | 2 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 3 | 3 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 8 | 3 | 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 6 | 4 | 3 3 3 |
| $Z_{18}$ | 18 | 4 | $E_{6,**}$ | 2 2 4 | 0 0 | 9 | 3 | 2 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 8 | 4 | 2 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 4 | 3 2 4 |
| $Z_{19}$ | 19 | -2 | $E_{8,*}$ | 2 2 4 | 0 0 | 10 | 3 | 2 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 8 | 5 | 2 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 5 | 3 2 4 |
| | | | | | 0 0 | 11 | 3 | 2 2 3 |
| | | | | | 0 0 | 9 | 4 | 3 2 3 |
| $Q_{16}$ | 16 | 9 | $D_{4,***}$ | 2 2 5 | 0 0 | 7 | 3 | 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 6 | 3 | 3 3 3 |
| $Q_{17}$ | 17 | -6 | $E_{6,**}$ | 2 2 5 | 0 0 | 8 | 3 | 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 4 | 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 6 | 4 | 3 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 8 | 3 | 2 2 4 |
| $Q_{18}$ | 18 | 3 | $E_{8,*}$ | 2 2 5 | 0 0 | 9 | 3 | 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 7 | 5 | 2 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 6 | 5 | 3 3 3 |
| | | | | | 0 0 | 10 | 3 | 2 2 3 |

Tabelle 4b (Fortsetzung)

| Singularität | μ | Diskriminante | Dualer Graph | $\bar{b}$ $\bar{c}$ $\bar{d}$ | κ λ | r | a | b c d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_{17}$ | 17 | -10 | $D_{4,***}$ | 2 3 3 | 0 0 | 7 | 3 | 2 2 5 |
| | | | | | 1 0 | 8 | 2 | 2 2 5 |
| $W_{18}$ | 18 | 7 | $E_{6,**}$ | 2 3 3 | 0 0 | 8 | 3 | 2 2 5 |
| | | | | | 1 0 | 8 | 3 | 2 2 5 |
| | | | | | 1 0 | 8 | 2 | 3 2 5 |
| $S_{16}$ | 16 | 17 | $D_{4,***}$ | 2 3 4 | 0 0 | 6 | 3 | 2 3 4 |
| | | | | | 1 0 | 7 | 2 | 2 3 4 |
| $S_{17}$ | 17 | -12 | $E_{6,**}$ | 2 3 4 | 0 0 | 7 | 3 | 2 3 4 |
| | | | | | 1 0 | 7 | 3 | 2 3 4 |
| | | | | | 1 0 | 7 | 2 | 3 3 4 |
| $U_{16}$ | 16 | 25 | $D_{4,***}$ | 3 3 3 | 1 0 | 6 | 2 | 3 4 3 |
| | | | | | 1 1 | 6 | 3 | 3 3 3 |

**Satz 1:**

Für die quadratische Form mit dem Dynkindiagramm $D'(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$, wobei $(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ eins der 7-Tupel von Tabelle 4a/b ist, gilt: $\mu_0 = 0$, $\mu_+ = 2$. Das entsprechende Gitter ist die orthogonale direkte Summe des Gitters mit dem Dynkindiagramm $D(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ (s. Abbildung 13) und einer unimodularen hyperbolischen Ebene. Der Graph $D(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ ist definiert für $\kappa,\lambda \in \{0,1\}$, $r,a,b,c,d \geq 1$ und $a+c+r \geq 3+\lambda$, $b+d+r \geq 3+\kappa$. Mit diesen Einschränkungen gilt:

$$\operatorname{rg}\,(D(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)) = r+a+b+c+d-4\ ,$$

$$\operatorname{disk}\,(D(0,0;r,a,b,c,d)) = (-1)^{r+a+b+c+d}\cdot \Big((r-3)abcd - (r-2)(abc+abd+acd+bcd) + (r-1)(ac+ad+bc+bd)\Big)\ ,$$

$$\operatorname{disk}\,(D(1,0;r,a,b,c,d)) = (-1)^{r+a+b+c+d}\cdot \Big[\Big((r-1)(b+d-1)-(b+d-1)-(r-1)\Big)(ac-a-c) + (r-1)(b+d-1) - ac(b+d+r-2)\Big],$$

$$\operatorname{disk}\,(D(1,1;r,a,b,c,d)) = (-1)^{r+a+b+c+d}\cdot \Big[(r-1)(b+d-1)(a+c-1) - 2\Big((r-1)(b+d-1)+(r-1)(a+c-1)+(b+d-1)(a+c-1)\Big)\Big].$$

**Bemerkungen:**

1) In Tabelle 4a/b ist den Dynkindiagrammen jeder Singularität der gewichtete duale Graph einer minimalen Auflösung von $(X,0)$, wobei $X = f^{-1}(0)$ und $f\colon (\mathbb{C}^3,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ ein Repräsentant aus der jeweiligen Singularitätenklasse ist, gegenübergestellt. Die gewichteten dualen Graphen haben nach [K5] für die bimodularen Singularitäten die in Abbildung 14 dargestellten Formen (wir verwenden die Notation von [L1]).

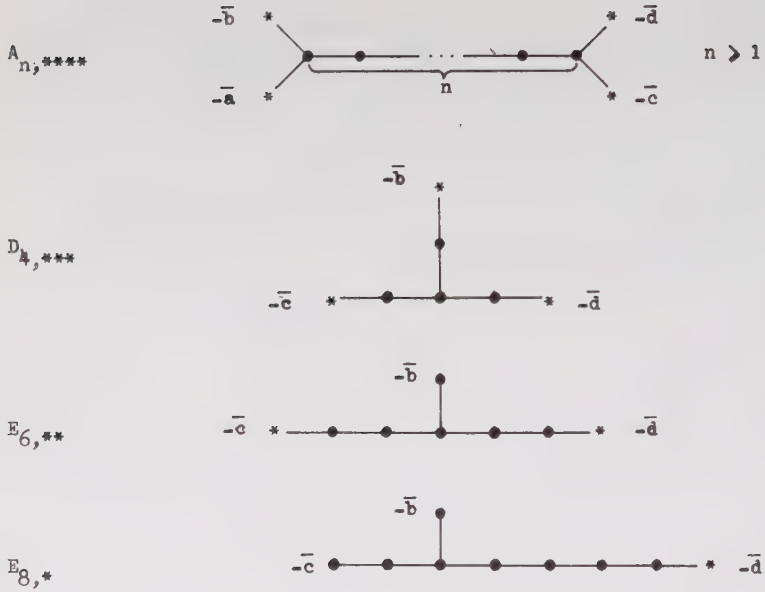



Abbildung 14

Dabei entsprechen alle Ecken nicht singulären rationalen Kurven, die Ecken von der Gestalt • haben Selbstschnittzahl -2. Die Selbstschnittzahlen $-\bar{a}$, $-\bar{b}$, $-\bar{c}$ und $-\bar{d}$ der äußeren Ecken und damit insbesondere der Ecken von der Gestalt * sind in Tabelle 4a/b nach der Angabe des Typs aufgelistet. Der gewichtete duale Graph kann als Dynkindiagramm eines nicht notwendig geraden Gitters aufgefaßt werden. Die Diskriminante dieses Gitters stimmt in allen Fällen von Tabelle 4a/b bis aufs Vorzeichen mit der Diskriminante der quadratischen Form der jeweiligen Singularität überein. Denn da die Zahlen von Null verschieden sind und die gewichteten dualen Graphen Bäume mit Ecken, denen rationale Kurven entsprechen, sind, sind in jedem Fall die Absolutbeträge beider Zahlen

mit der Ordnung von $H_1(K,\mathbb{Z})$ identisch, wobei $K = X \cap \partial B$ der Durchschnitt von X mit dem Rand einer kleinen Kugel $B \subset \mathbb{C}^3$ um den Nullpunkt ist (vgl. [M3], [M2], [H1]). Man beachte die seltsame Dualität zwischen den Zahlen von Tabelle 4a/b.

2) In Tabelle 4a/b sind fast jeder Singularität mehrere verschiedene Dynkindiagramme vom Typ $D'(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ zugeordnet. Diese Mehrdeutigkeit ist mit den Deformationsbeziehungen von [L1], Theorem 6.29, (vgl. auch [K1]) zu vergleichen. Nimmt man für die unimodularen Singularitäten die Dynkindiagramme in der kanonischen Form von Gabrielov (s. Abbildung 15, Tabelle 5) hinzu, so gilt: Zu jeder Deformation $Y \to Z$ von [L1], Theorem 6.29, gibt es in den Tabellen 4a, 4b und 5 je ein Dynkindiagramm zu Y und Z, so daß dasjenige zu Z ein Untergraph von dem zu Y ist. Man kommt dabei im allgemeinen nicht mit einem Diagramm für Y aus.

Ergänzung zu Korollar 1:

Jede bimodulare Singularität besitzt sogar eine schwach ausgezeichnete Basis mit einem Dynkindiagramm der Form $D'(\kappa,0;r,a,b,c,d)$, nicht jedoch jede eine mit einem Dynkindiagramm der Form $D'(0,0;r,a,b,c,d)$.

Beweis:

Zur ersten Aussage vergleiche man Tabelle 4a/b. Durch Vergleich der Diskriminanten läßt sich ferner zeigen, daß die quadratische Form von $U_{16}$ kein Dynkindiagramm der Form $D'(0,0;r,a,b,c,d)$ besitzt.

## 4.2 Ausgezeichnete Basen

Nach Gabrielov [G1] besitzen die Singularitäten $T_{i,j,k}$ $(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} < 1)$ eine ausgezeichnete Basis $\{e_2, e_3, \ldots, e_\mu\}$ mit einem Dynkindiagramm der Form und Numerierung von Abbildung 15 mit $s = 1$. Die Dynkindiagramme der exzeptionellen unimodularen Singularitäten in der kanonischen Form von [G1], Fig. 13a, erweisen sich ebenfalls in der Numerierung von Abbildung 15 als Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen.

Satz 1:
Die exzeptionellen unimodularen Singularitäten besitzen eine ausgezeichnete Basis mit einem Dynkindiagramm der Form von Abbildung 15 mit $s = 2$ und den Werten p,q,r von Tabelle 5.

Für eine bimodulare Singularität ist hingegen im allgemeinen keines der im vorigen Abschnitt angegebenen Dynkindiagramme vom Typ $D'(\kappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ bezüglich irgendeiner Numerierung ein Dynkindiagramm zu einer ausgezeichneten Basis. Denn wäre dies für ein Diagramm bezüglich einer gewissen Numerierung der Fall, so müßte das zu dem numerierten Diagramm gehörige "Coxeterelement", d.h. das Produkt der Spiegelungen zu den einzelnen Basiselementen in der Reihenfolge ihrer Numerierung, mit dem klassischen Monodromieoperator der Singularität übereinstimmen (vgl. Kap. 0.3). Es läßt sich aber z.B. bei $J_{3,0}$ oder $E_{19}$ mit Hilfe der in [E1] entwickelten Methoden zeigen, daß diese Eigenschaft für alle angegebenen Diagramme und jede Numerierung verletzt ist.

Stattdessen gilt:

Satz 2:

Die bimodularen Singularitäten besitzen eine ausgezeichnete Basis mit einem Dynkindiagramm der Form von Abbildung 16 mit den Werten $\varkappa,\lambda;p,q,r,s$ von Tabelle 6.

Der Graph von Abbildung 16 kann durch die Transformationen $\alpha_6(3)$, $\alpha_7(3)$, $\alpha_8(3)$, $\alpha_6(3)$ und anschließende Verschiebungen gemäß Bemerkung 3) von Kap. 1 und Anwendungen von Operationen $\gamma_k$ in einen Graphen vom Typ $D'(\varkappa,\lambda;r,a,b,c,d)$ umgeformt werden.

Zur Herleitung von Satz 1 und Satz 2 aus [G3] mit Hilfe der Transformationen $\alpha_k$, $\beta_{k+1}$ und $\gamma_k$ verweisen wir auf den Anhang, Kap. A.2.

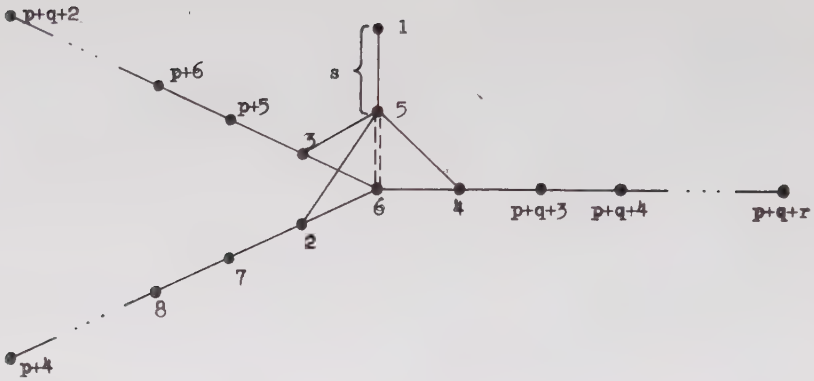



Abbildung 15

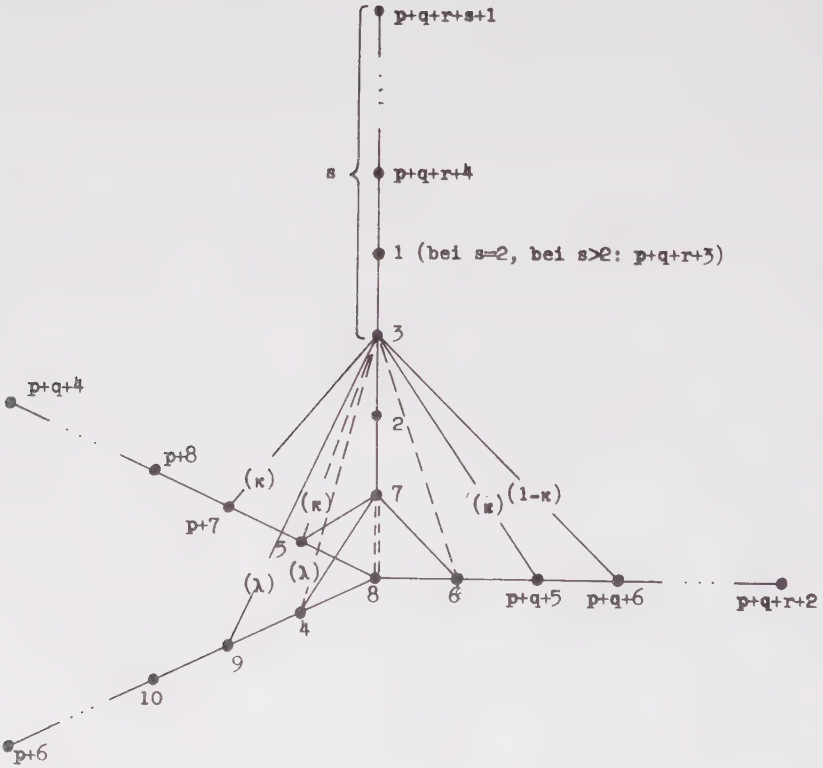



Abbildung 16

**Tabelle 5**

| | p | q | r | s | | p | q | r | s | | p | q | r | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_{i,j,k}$ | i | j | k | 1 | $Z_{12}$ | 2 | 4 | 6 | 2 | $W_{12}$ | 2 | 5 | 5 | 2 |
| $E_{12}$ | 2 | 3 | 7 | 2 | $Z_{13}$ | 2 | 4 | 7 | 2 | $W_{13}$ | 2 | 5 | 6 | 2 |
| $E_{13}$ | 2 | 3 | 8 | 2 | $Q_{10}$ | 3 | 3 | 4 | 2 | $S_{11}$ | 3 | 4 | 4 | 2 |
| $E_{14}$ | 2 | 3 | 9 | 2 | $Q_{11}$ | 3 | 3 | 5 | 2 | $S_{12}$ | 3 | 4 | 5 | 2 |
| $Z_{11}$ | 2 | 4 | 5 | 2 | $Q_{12}$ | 3 | 3 | 6 | 2 | $U_{12}$ | 4 | 4 | 4 | 2 |

**Tabelle 6**

| | κ | λ | p | q | r | s | | κ | λ | p | q | r | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{3,i}$ $(i\geq 0)$ | 0 | 0 | 2 | 3 | 10+i | 1 | $E_{18}$ | 0 | 0 | 2 | 3 | 11 | 2 |
| $Z_{1,i}$ $(i\geq 0)$ | 0 | 0 | 2 | 4 | 8+i | 1 | $E_{19}$ | 0 | 0 | 2 | 3 | 12 | 2 |
| $Q_{2,i}$ $(i\geq 0)$ | 0 | 0 | 3 | 3 | 7+i | 1 | $E_{20}$ | 0 | 0 | 2 | 3 | 13 | 2 |
| $W_{1,i}$ $(i\geq 0)$ | 1 | 0 | 2 | 6 | 6 | i+1 | $Z_{17}$ | 0 | 0 | 2 | 4 | 9 | 2 |
| $W^{\#}_{1,2j-1}$ $(j\geq 1)$ | 1 | 0 | 2 | 5+j | 6+j | 1 | $Z_{18}$ | 0 | 0 | 2 | 4 | 10 | 2 |
| $W^{\#}_{1,2j}$ $(j\geq 1)$ | 1 | 0 | 2 | 6+j | 6+j | 1 | $Z_{19}$ | 0 | 0 | 2 | 4 | 11 | 2 |
| $S_{1,i}$ $(i\geq 0)$ | 1 | 0 | 3 | 5 | 5 | i+1 | $Q_{16}$ | 0 | 0 | 3 | 3 | 8 | 2 |
| $S^{\#}_{1,2j-1}$ $(j\geq 1)$ | 1 | 0 | 3 | 4+j | 5+j | 1 | $Q_{17}$ | 0 | 0 | 3 | 3 | 9 | 2 |
| $S^{\#}_{1,2j}$ $(j\geq 1)$ | 1 | 0 | 3 | 5+j | 5+j | 1 | $Q_{18}$ | 0 | 0 | 3 | 3 | 10 | 2 |
| $U_{1,2j-1}$ $(j\geq 1)$ | 1 | 0 | 4 | 4+j | 4+j | 1 | $W_{17}$ | 1 | 0 | 2 | 6 | 7 | 2 |
| $U_{1,2j}$ $(j\geq 0)$ | 1 | 0 | 4 | 4+j | 5+j | 1 | $W_{18}$ | 1 | 0 | 2 | 7 | 7 | 2 |
| | | | | | | | $S_{16}$ | 1 | 0 | 3 | 5 | 6 | 2 |
| | | | | | | | $S_{17}$ | 1 | 0 | 3 | 6 | 6 | 2 |
| | | | | | | | $U_{16}$ | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 1 |

# A N H A N G

## A.1. Transformationen zu Kapitel 1

Nach [G3] erhält man für die Singularitäten von Theorem 1.1 auf die folgende Weise Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen. Jeder Singularität sind nach Tabelle A.1 vier Zahlen $M_1,\dots,M_4$ zugeordnet. Wir nennen ein Paar $(m,j)$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$) zulässig, wenn $m < M_j$. Die Menge aller zulässigen Paare für eine Singularität sei lexikographisch geordnet. Dann existiert eine ausgezeichnete Basis $\{e_j^m \mid (m,j) \text{ zulässig}\}$ der Singularität mit der folgenden Schnittmatrix (für einen Repräsentanten $f\colon (\mathbb{C}^3,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$, vgl. Kap. 0.3):

$$b(e_j^m, e_{j'}^{m'}) = \begin{cases} -2 & \text{für } m'=m,\ j'=j\ , \\ 1 & \text{für } m'=m,\ j'\neq j,\ j=4 \text{ oder } j'=4, \\ & \text{oder für } j'=j,\ |m'-m|=1\ , \\ -1 & \text{für } |m'-m|=1,\ (m'-m)(j'-j)<0,\ j=4 \text{ oder } j'=4\ , \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen nun, wie diese Dynkindiagramme in die Diagramme zu schwach ausgezeichneten Basen von Kap. 1 transformiert werden können. Die Angabe der Transformationen erfolgt in der im folgenden beschriebenen Form:

Die einzelnen Transformationen sind zu gewissen Einheiten zusammengefaßt, die wir Algorithmen und Vorbereitungstransformationen nennen. Die Vorbereitungstransformationen sind einmalig am Anfang, die Algorithmen dagegen iterativ anwendbar. Diese Einheiten sind in einzelne numerierte

**Tabelle A.1**

| Singularität | $M_1, M_2, M_3, M_4$ | Singularität | $M_1, M_2, M_3, M_4$ |
|---|---|---|---|
| $J_{k,i}$ | 0,0,3k+i-1,3k-1 | $Q_{k,i}$ | 2,2,3k-1,3k+i-1 |
| $E_{6k}$ | 0,0,3k,3k | $Q_{6k+4}$ | 2,2,3k,3k |
| $E_{6k+1}$ | 0,0,3k+1,3k | $Q_{6k+5}$ | 2,2,3k+1,3k |
| $E_{6k+2}$ | 0,0,3k+1,3k+1 | $Q_{6k+6}$ | 2,2,3k+1,3k+1 |
| $X_{k,i}$ | 0,4k-1,4k-1,4k+i-1 | $S_{12k-1}$ | 2,4k-1,4k-1,4k-1 |
| $Y^k_{i,j}$ | 0,4k+i-1,4k+j-1,4k-1 | $S_{12k}$ | 2,4k,4k-1,4k-1 |
| $Z^k_{j,i}$ | 0,4k-1,4k+3j+i-1,4k+3j-1 | $S_{k,i}$ | 2,4k,4k,4k+i |
| $Z^k_{12k+6j-1}$ | 0,4k+3j,4k-1,4k+3j | $S^\#_{k,2j-1}$ | 2,4k+j,4k+j-1,4k |
| $Z^k_{12k+6j}$ | 0,4k+3j+1,4k-1,4k+3j | $S^\#_{k,2j}$ | 2,4k+j,4k+j,4k |
| $Z^k_{12k+6j+1}$ | 0,4k+3j+1,4k-1,4k+3j+1 | $S_{12k+4}$ | 2,4k+1,4k,4k+1 |
| $W_{12k}$ | 0,4k,4k,4k | $S_{12k+5}$ | 2,4k+1,4k+1,4k+1 |
| $W_{12k+1}$ | 0,4k+1,4k,4k | $T_{i,j,k}$ | i-1,j-1,k-1,2 |
| $W_{k,i}$ | 0,4k+1,4k+1,4k+i+1 | $U_{12k}$ | 3k,3k,3k,3k |
| $W^\#_{k,2j-1}$ | 0,4k+j+1,4k+j,4k+1 | $U_{k,2j-1}$ | 3k+j,3k+j,3k,3k+1 |
| $W^\#_{k,2j}$ | 0,4k+j+1,4k+j+1,4k+1 | $U_{k,2j}$ | 3k+j+1,3k+j,3k,3k+1 *) |
| $W_{12k+5}$ | 0,4k+2,4k+1,4k+2 | $U_{12k+4}$ | 3k+1,3k+1,3k+1,3k+1 |
| $W_{12k+6}$ | 0,4k+2,4k+2,4k+2 | | |

*) Hier muß auch in Tabelle 1 von [G3] ergänzt werden: Für j=0 gilt in diesem Fall abweichend von der allgemeinen Definition der Schnittmatrix: $b(e_2^{3k}, e_4^{3k+1}) = 1$, $b(e_4^{3k}, e_4^{3k+1}) = 0$.

Umformungsschritte aufgeteilt. Vor jedem Schritt wird das Ausgangsdiagramm angegeben, nach dem Schritt das Ergebnisdiagramm. Für die Angabe der Operationen innerhalb eines Schrittes treffen wir folgende Konventionen:

Sei $\{e_1,\dots,e_\mu\}$ die Basis eines Gitters. Dann sind nach Kap. 0 die Operationen $\alpha_k(k')$ und $\gamma_k$ für $k,k' \in \{1,\dots,\mu\}$ definiert. Eine Folge von Operationen $\alpha_k(k')$ mit gleichem $k'$ bzw. von Operationen $\gamma_k$ geben wir in der folgenden Weise an. Sei $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_l)$ ein $l$-Tupel von natürlichen Zahlen $\varphi_i$ mit $1 \leq \varphi_i \leq \mu$ und $k'$ eine natürliche Zahl mit $1 \leq k' \leq \mu$. Dann setzen wir

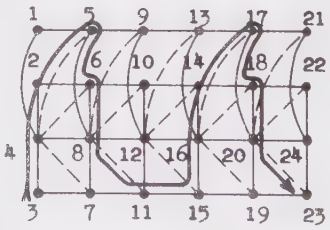
$$\alpha_\varphi(k') := \alpha_{\varphi_1}(k') \circ \alpha_{\varphi_2}(k') \circ \dots \circ \alpha_{\varphi_l}(k')$$

$$\gamma_\varphi := \gamma_{\varphi_1} \circ \gamma_{\varphi_2} \circ \dots \circ \gamma_{\varphi_l}$$

(Die Operationen werden dabei rechts beginnend angewandt.) Ein Schritt setzt sich aus solchen Operationen $\alpha_\varphi(k')$, $\gamma_\varphi$ für gewisse Tupel $\varphi$ zusammen. Diesen Tupeln entsprechen Eckenfolgen im Dynkindiagramm. Wir geben diese Eckenfolgen graphisch im Ausgangsdiagramm vor dem jeweiligen Schritt an.

Beispiel:

In dem folgenden Diagramm



ist $\varphi = (3,4,5,6,8,11,15,16,17,18,20,23)$.

Die Numerierung wird bei den Diagrammen fortgelassen. Um die Analogie der Transformationen hervorzuheben, werden analoge Eckenfolgen mit den gleichen Symbolen bezeichnet. Das kann dazu führen, daß innerhalb eines Algorithmus oder einer Vorbereitungstransformation verschiedene Eckenfolgen die gleiche Bezeichnung erhalten. Deshalb vereinbaren wir, daß sich die Bezeichnungen in einem Umformungsschritt immer auf das Ausgangsdiagramm vor dem jeweiligen Schritt beziehen.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein: Sei $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ ein k-Tupel, $\psi = (\psi_1,\ldots,\psi_l)$ ein l-Tupel von natürlichen Zahlen. Wir setzen:

$$\varphi \circ \psi := (\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\psi_1,\ldots,\psi_l) ,$$

$$\text{inv } \varphi := (\varphi_k,\varphi_{k-1},\ldots,\varphi_1) ,$$

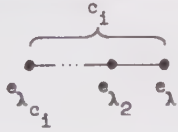
$$\text{beg } \varphi := \varphi_1 ,$$

$$\text{end } \varphi := \varphi_k ,$$

$$\varphi\text{-beg} := (\varphi_2,\ldots,\varphi_k) ,$$

$$\varphi\text{-end} := (\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}) .$$

Zu den dargestellten Diagrammen ist folgendes zu bemerken: Um eine iterative Anwendung der Algorithmen zu ermöglichen, können sie im folgenden Sinne als Untergraphen aufgefaßt werden. Die Ecken eines "Armes"



können mit weiteren Ecken gewisser anderer Graphen verbunden sein. Ist für eine solche Ecke $e_\kappa$

$$\sum_{j=1}^{c_1} b(e_{\lambda_j}, e_\kappa) = 0 ,$$

so werden bei den Transformationen keine neuen Verbindungen zu der Ecke $e_\kappa$ geschaffen. Andernfalls werden bei der nächsten Transformation, bei der der entsprechende Arm verlängert wird, neue Kanten so eingefügt, daß die obige Bedingung danach erfüllt ist.

Man darf einen Algorithmus mit einem beliebigen Schritt beginnen. In diesem Fall sind in dem Ausgangsdiagramm und in den folgenden Diagrammen die Ergebnisse der vorherigen Transformationen zu ignorieren.

In Klammern ist bei den Diagrammen angegeben, zu welchen Singularitäten die Untergraphen gehören, die dadurch definiert sind, daß man die linken Arme bis auf jeweils eine Ecke entfernt. An diesen Stellen kann dann auch für die betreffenden Singularitäten mit der Umformung begonnen werden.

Die Umformung geht nun im einzelnen folgendermaßen vor sich. Die Diagramme von Tabelle 1a erhält man, indem man die Algorithmen I (Alternative A), II und III und in einigen Fällen vorher die Vorbereitungstransformationen V 0.1 und V 0.2 anwendet. Dabei beginnt man entweder nach Ausführung einer Vorbereitungstransformation oder direkt mit dem Schritt eines Algorithmus, dessen Transformationen anwendbar sind. Nun führt man solange die nächsten Schritte aus, bis man zu einem kommt, der nicht mehr anwendbar ist. Dann ist man entweder bei der Form von Abbildung 1 bis auf eventuelle Verschiebungen (vgl. Bemerkung 3) von Kap. 1)

und Anwendungen von Operationen $\gamma_k$ angelangt, oder man muß mit einem anderen Algorithmus entsprechend fortfahren. (Eine Ausnahme bildet $Q_{k,i}$. In diesem Fall ist bei der ersten Anwendung von Schritt (1) von Algorithmus I die Alternative B statt A zu wählen.)

Beispiel:

$Q_{18}$

Anwendung von:

Algorithmus I:(2) (k=4), (3), (4), (1,A) (k=3), (2), (3), (4);

Algorithmus II:(1) (k=1, $c_1=8$, $c_2=c_3=c_4=1$)

ergibt nach Verschiebungen T(3,3,10,0,1,0,1,0,0,0)

Die Werte von Tabelle 1b erhält man, indem man zunächst die Vorbereitungstransformationen V 0, V I, V II und V III anwendet bzw. bei der ersten Durchführung von Schritt (1) bei Algorithmus I die Alternative B (im Fall $Q_{k,i}$ A) anwendet. (Die zweiten Werte von $W_{12k+6}$ und $S_{12k+5}$ ergeben sich, wenn man nach V II.3(1) zu Algorithmus II(3) übergeht.)

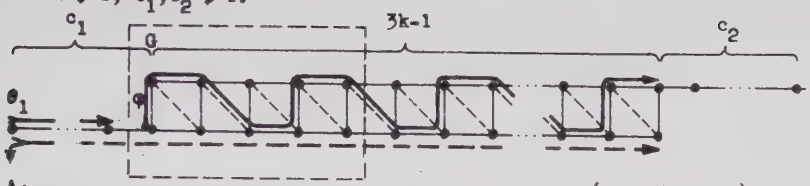
Zum Beweis von Theorem 1.2 schließlich wählt man die Alternativen A und B bei Algorithmus I alternierend: Bei der Anwendung von Schritt (1) auf ein Diagramm mit k gerade (ungerade) geht man nach Alternative A (B) vor. Dabei wird bei der ersten Durchführung von Schritt (1) eine Ausnahme gemacht: Hier kann man zwischen den beiden Alternativen wäh-

len. Man kann aber auch mit der Vorbereitungstransformation V I beginnen. Dadurch kommen die mehreren möglichen Werte für einige Singularitäten in Tabelle 2 zustande.

Es folgt nun die Angabe der Algorithmen und Vorbereitungstransformationen.

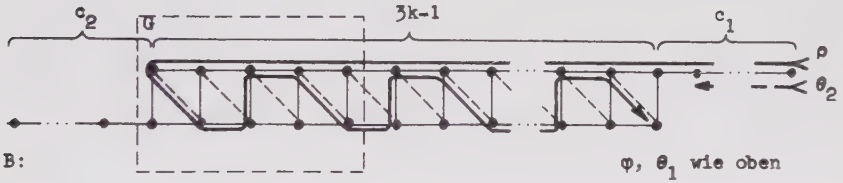
Algorithmus I

Sei $k > 1$, $c_1, c_2 > 1$.




$(c_2 = 1: J_{k,0})$

(1,A) $\alpha_{\psi}$(end $\psi$), $\alpha_{\theta_1 \circ \varphi}$(end $\varphi$), $\gamma_{\text{end } \varphi}$

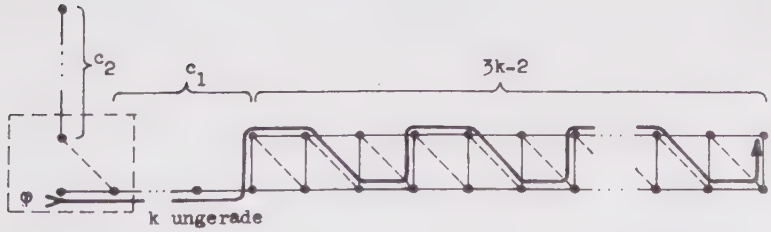



$\varphi$, $\theta_1$ wie oben

(1,B) $\alpha_{\rho}$(end $\rho$), $\gamma_{\text{end } \rho}$, $\alpha_{\theta_2 \circ \text{ inv } \varphi}$(beg $\varphi$), $\gamma_{\text{beg } \varphi}$, $\alpha_{\varphi\text{-beg}}$(end $\varphi$),

$\gamma_{\text{end } \varphi}$

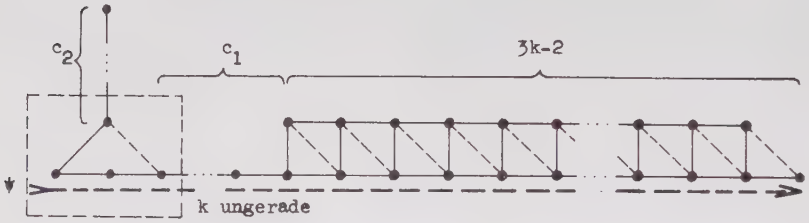
(bei k ungerade zusätzlich: $\gamma_{\text{end } \varphi}$, $\gamma_{\theta_2}$, $\gamma_{\text{beg } \varphi}$, $\gamma_{\theta_1}$)



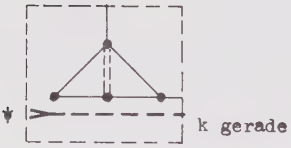

$(E_{6(k-1)+2})$

Sei $k \geq 2$.

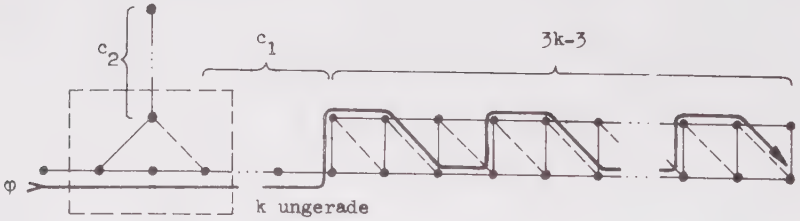
(2) $\alpha_{\varphi}(\text{end } \varphi)$ (bei k gerade zusätzlich: $\gamma_{\text{end } \varphi}$)



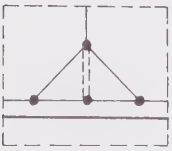

$(E_{6(k-1)+1})$



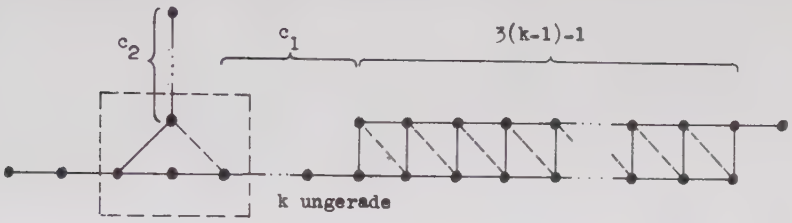

(3) $\alpha_{\psi}(\text{end } \psi)$

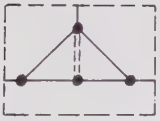



$(E_{6(k-1)})$



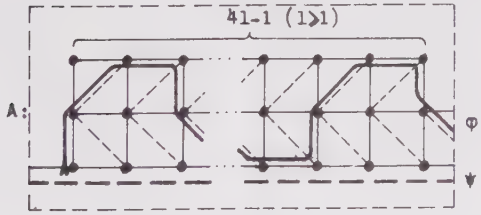
(4) $\alpha_{\varphi}$(end $\varphi$) (bei k gerade zusätzlich: $\gamma_{\text{end }\varphi}$)

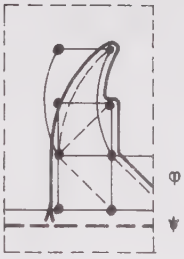



Zurück nach (1)

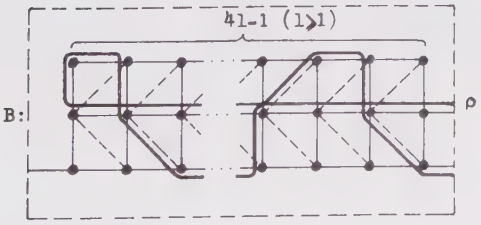
Der eingerahmte Teilgraph G kann auch im Fall k ⩾ 3 durch die folgenden Teilgraphen mit den eingezeichneten Eckenfolgen ersetzt werden. (Die Zahl k bleibt davon unbeeinflußt.)

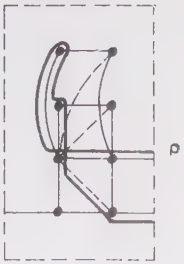



(Z-Serie)

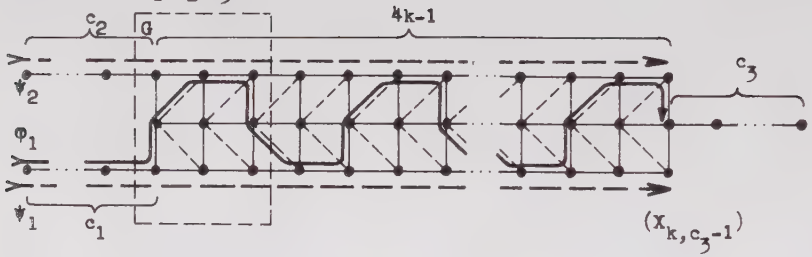
(Q-Serie)



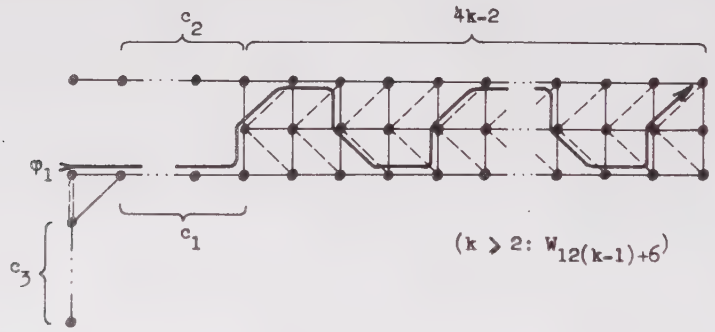



Algorithmus II

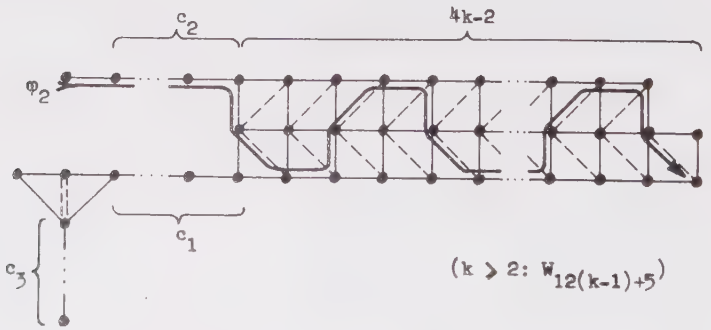
Sei $k \geq 1$, $c_1, c_2, c_3 \geq 1$.



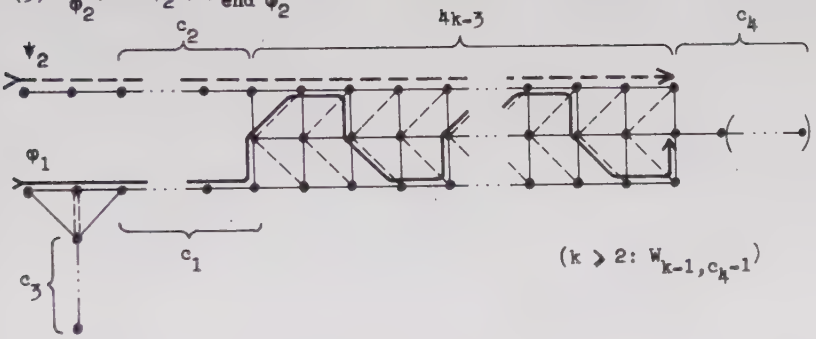

(1) $\alpha_{\psi_1}(\text{end } \psi_1)$, $\alpha_{\varphi_1}(\text{end } \varphi_1)$, $\gamma_{\text{end } \varphi_1}$, $\alpha_{\psi_2}(\text{end } \psi_2)$




(2) $\alpha_{\varphi_1}(\text{end } \varphi_1)$, $\gamma_{\text{end } \varphi_1}$

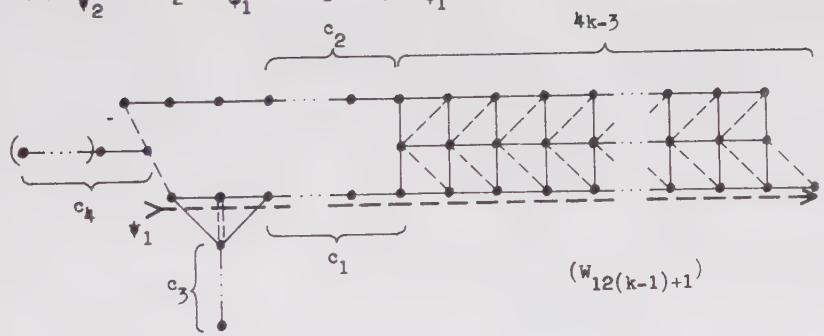


(3) $\alpha_{\varphi_2}$ (end $\varphi_2$), $\gamma_{\text{end } \varphi_2}$

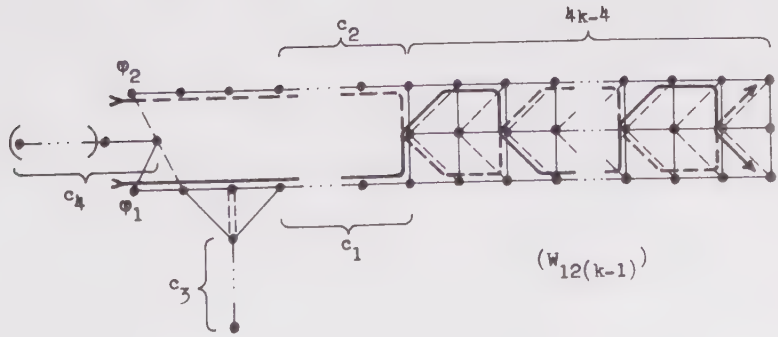



Sei $k > 2$.

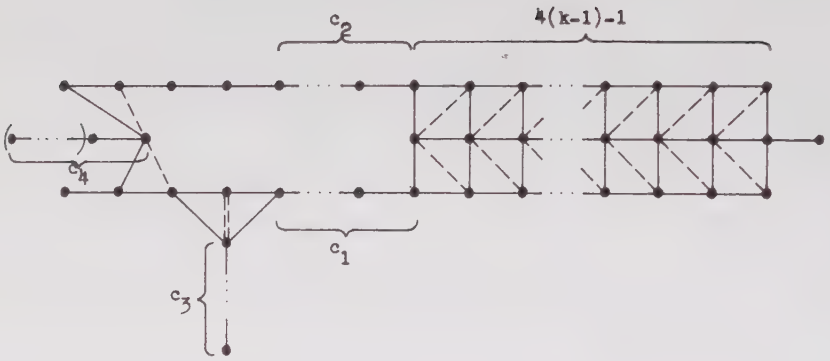
(4) $\alpha_{\psi_2}$ (end $\psi_2$), $\alpha_{\varphi_1}$ (end $\varphi_1$), $\gamma_{\text{end } \varphi_1}$




(5) $\alpha_{\psi_1}$ (end $\psi_1$)

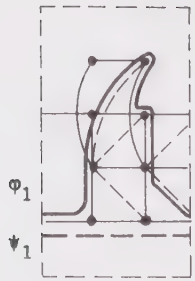


(6) $\alpha_{\varphi_1}(\text{end } \varphi_1)$, $\alpha_{\varphi_2}(\text{end } \varphi_2)$




Zurück nach (1)

Der eingerahmte Teilgraph G kann im Fall $k > 2$ durch den folgenden Teilgraphen mit den eingezeichneten Eckenfolgen ersetzt werden:

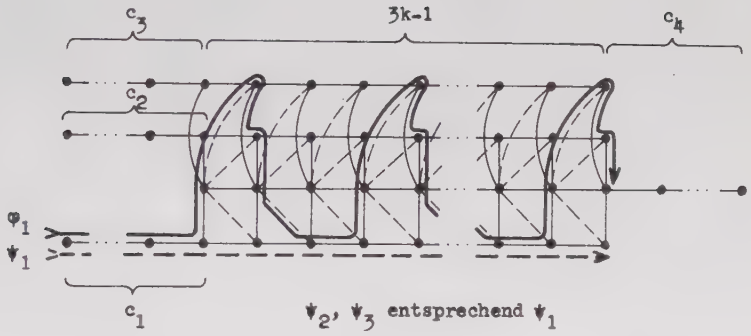



(S-Serie)

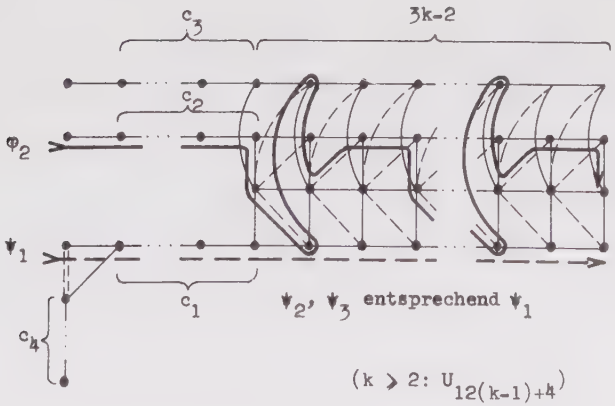
(entsprechend $\varphi_2$, $\psi_2$)

Algorithmus III

Sei $k \geq 1$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 1$.

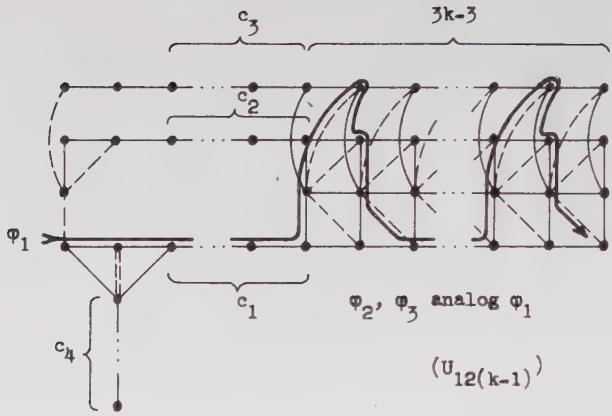



(1) $\alpha_{\psi_1}(\text{end } \psi_1)$, $\alpha_{\varphi_1}(\text{end } \varphi_1)$, $\gamma_{\text{end } \varphi_1}$, $\alpha_{\psi_2}(\text{end } \psi_2)$, $\alpha_{\psi_3}(\text{end } \psi_3)$

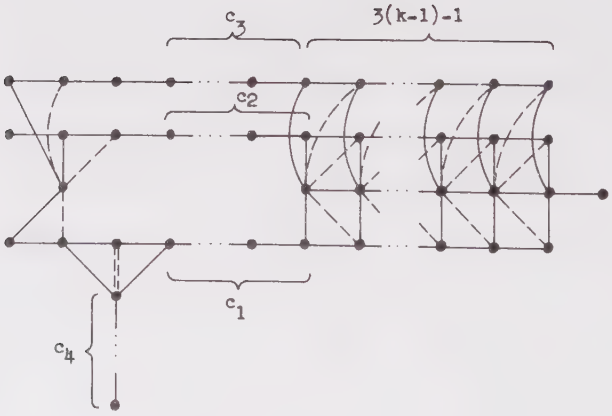



Sei $k \geq 2$.

(2) $\alpha_{\psi_1}(\text{end } \psi_1)$, $\alpha_{\psi_3}(\text{end } \psi_3)$, $\alpha_{\varphi_2}(\text{end } \varphi_2)$, $\gamma_{\text{end } \varphi_2}$, $\alpha_{\psi_2}(\text{end } \psi_2)$



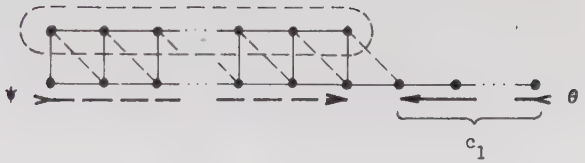

(3) $\alpha_{\varphi_1}$(end $\varphi_1$), $\alpha_{\varphi_2}$(end $\varphi_2$), $\alpha_{\varphi_3}$(end $\varphi_3$)




Zurück nach (1)

Vorbereitungstransformationen

V 0.1

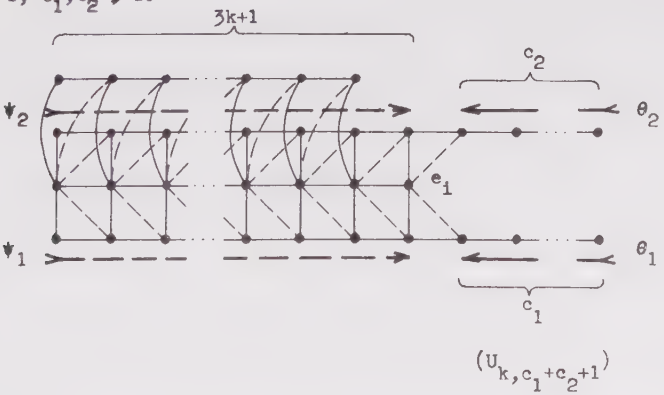



(1) $\alpha_{\psi}(\text{end } \psi)$, $\gamma_{\theta}$

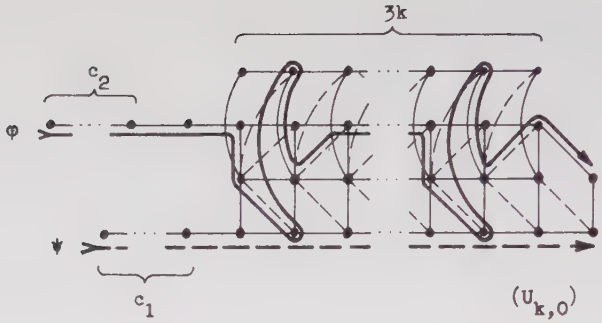
Die eingerahmten Ecken können mit weiteren Ecken verbunden sein.

V 0.2

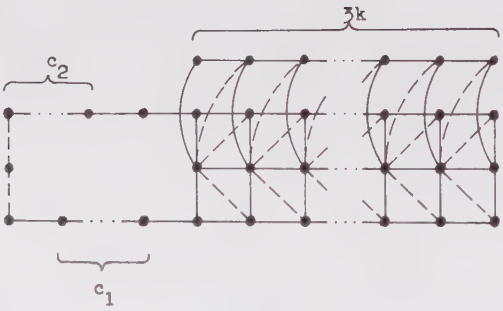
Sei $k \geq 1$, $c_1, c_2 \geq 1$.




(1) $\alpha_{\text{end } \psi_2}(i)$, $\alpha_{\psi_2}(\text{end } \psi_2)$, $\gamma_{\theta_2}$, $\alpha_{\psi_1}(\text{end } \theta_1)$, $\gamma_{\theta_1}$

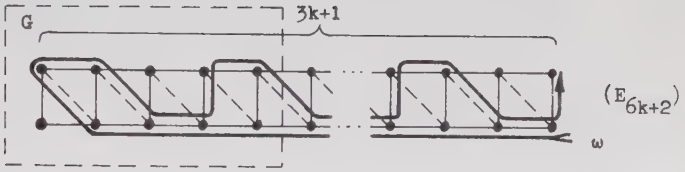



(2) $\alpha_{\varphi}$(end $\varphi$), $\alpha_{\psi}$(end $\psi$), $\gamma_{\text{end } \varphi}$

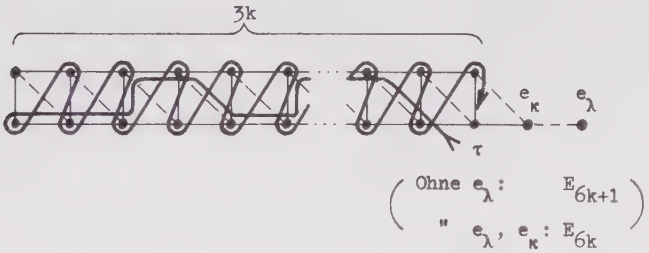


V I

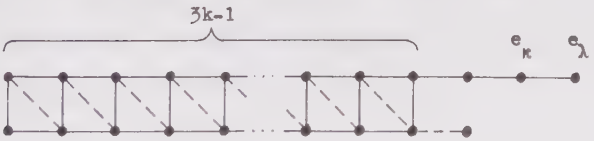
Sei $k \geq 1$.




(1) $\alpha_\omega$(end ω) (bei k ungerade zusätzlich: $\gamma_{\text{end } \omega}$)




(2) $\alpha_\tau$(end τ), (bei k ungerade zusätzlich: $\gamma_{\text{end } \tau}$,) $\gamma_\kappa$

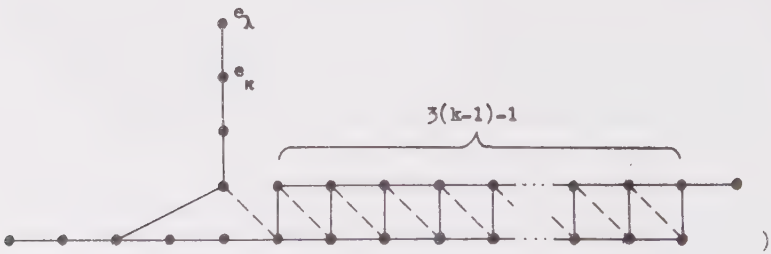



Der eingerahmte Teilgraph G kann für $k \geq 2$ ersetzt werden durch die folgenden Teilgraphen mit den eingezeichneten Eckenfolgen:

$(z^1_{12+6(k-2)+1},\ z^1_{12+6(k-2)},\ z^1_{12+6(k-2)-1})$

$(q_{6(k-1)+6},\ q_{6(k-1)+5},\ q_{6(k-1)+4})$

(Nach einmaliger Anwendung von Algorithmus I(A) ergibt sich im Fall k ungerade:

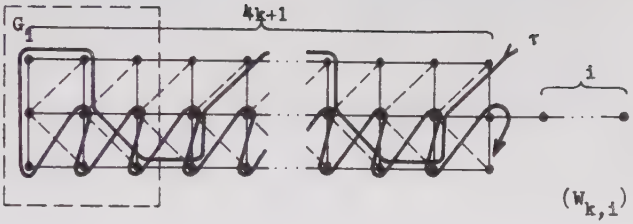



)

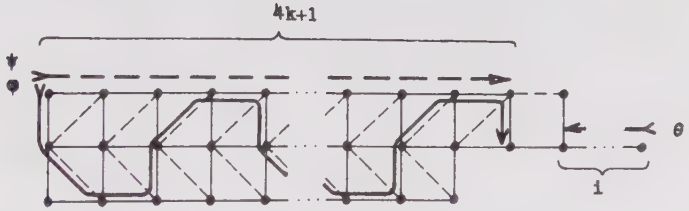
V II

V II.1

Sei $k > 1$, $i > 0$.




(1) $\alpha_\tau$(end $\tau$), $\gamma_{\text{end }\tau}$




(2) (Bei $i \neq 0$ zunächst: $\alpha_\varphi$(end $\theta$), $\gamma_\theta$)

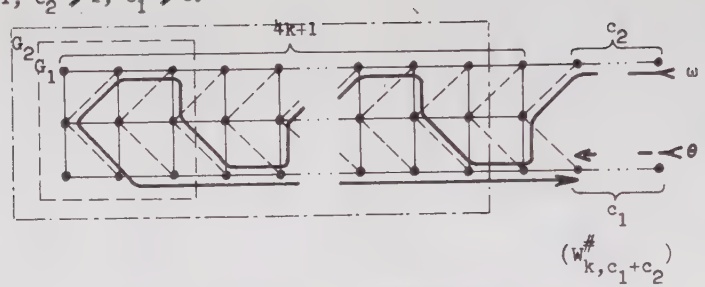
$\alpha_\varphi$(end $\varphi$), (bei $i \neq 0$ zusätzlich: $\alpha_\theta$(end $\varphi$))

$\alpha_\psi$(end $\psi$), (bei $i \neq 0$ zusätzlich: $\alpha_\theta$(end $\psi$))

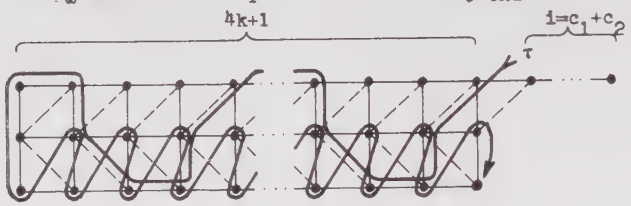
$\alpha_{\text{end }\varphi}$(end $\psi$)

V II.2

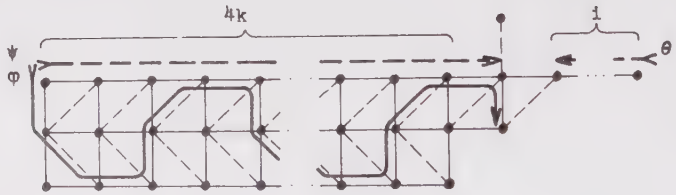
Sei $k \geq 1$, $c_2 \geq 1$, $c_1 \geq 0$.



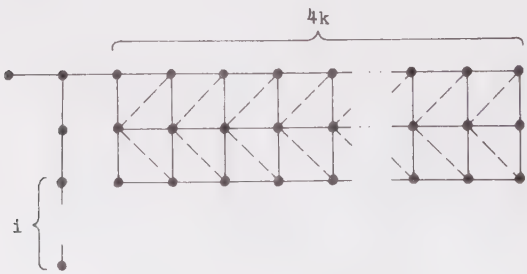

(1) (bei $c_1 \geq 1$) $\alpha_\omega$(end $\omega$) (bei $c_1 \geq 2$ zusätzlich: $\gamma_{\theta\text{-end}}$)




(2) $\alpha_\tau$(end $\tau$), $\gamma_{\text{end } \tau}$

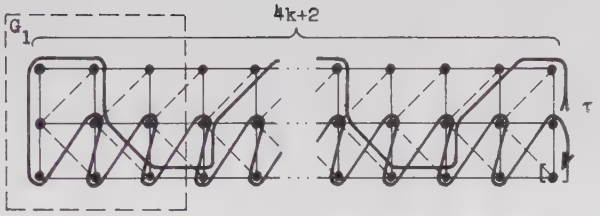



(3) $\alpha_\varphi$(end $\varphi$), $\alpha_{\text{end } \varphi \circ \psi}$(end $\psi$), $\gamma_\theta$



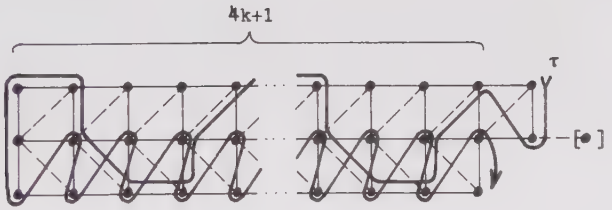
V II.3

Sei $k > 1$.

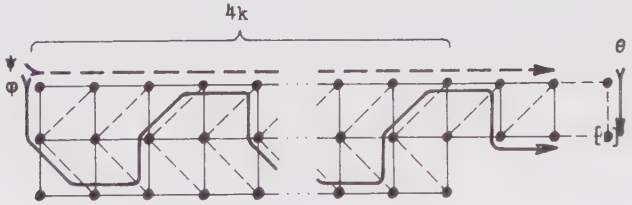



( Mit dem Eingeklammerten: $W_{12k+6}$
Ohne das Eingeklammerte: $W_{12k+5}$ )

[(1) $\alpha_\tau$(end $\tau$), $\gamma_{\text{end }\tau}$ ]




(2) $\alpha_\tau$(end $\tau$), $\gamma_{\text{end }\tau}$



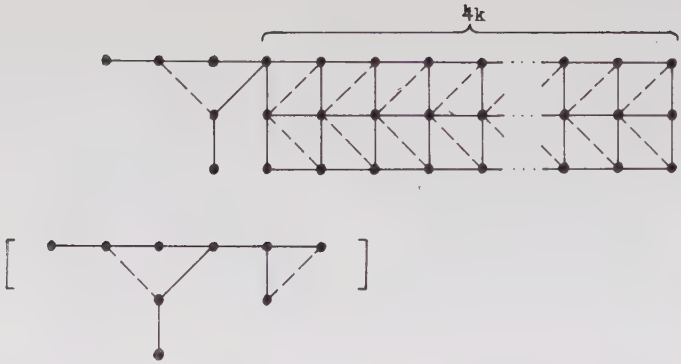

(3) [$\alpha_{\psi \circ \theta}$(end $\theta$),] $\alpha_\psi$(end $\psi$), [$\alpha_{\text{end }\theta}$(end $\psi$),] $\alpha_\varphi$(end $\varphi$);

[$\alpha_{\text{end }\theta}$(end $\varphi$);]

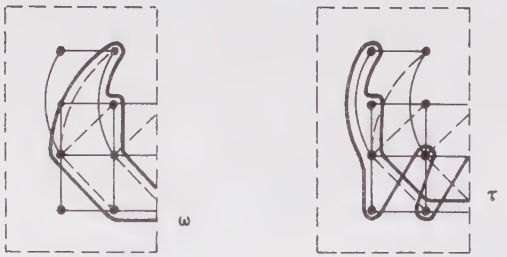
$\varphi' :=$ end $\varphi \circ$ [end $\theta$] $\circ \varphi$-end ;

$\psi' :=$ end $\psi \circ$ [end $\theta$] $\circ \psi$-end ;

$\alpha_{\varphi'}$(end $\varphi'$), $\alpha_{\text{end }\varphi' \circ \psi'}$(end $\psi'$)



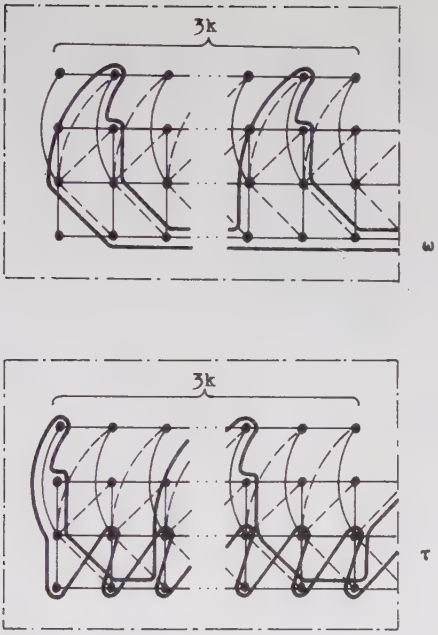

Der eingerahmte Teilgraph $G_1$ kann durch den folgenden Teilgraphen mit den eingezeichneten Eckenfolgen ersetzt werden:




$\varphi$, $\Psi$ wie bei Algorithmus II

$$(S_{k,i},\ S^{\#}_{k,i},\ S_{12k+4},\ S_{12k+5})$$

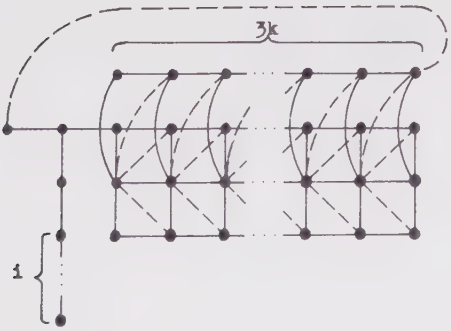
Der eingerahmte Teilgraph $G_2$ in V II.2 kann durch den folgenden Teilgraphen mit den eingezeichneten Eckenfolgen ersetzt werden:




φ, ψ wie bei Algorithmus III

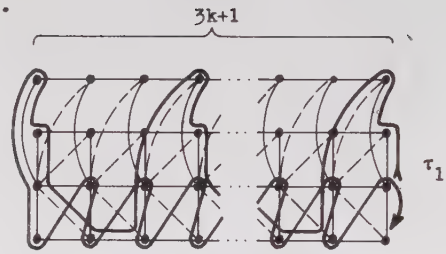
$(U_{k,i})$

(Als Ergebnis der Transformation V II.2 erhält man dann folgendes Diagramm:



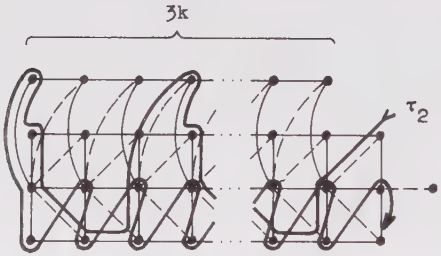
V III

Sei $k \geq 1$.

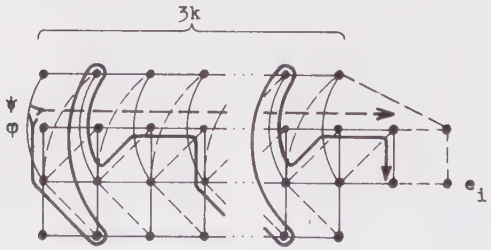



$(U_{12k+4})$

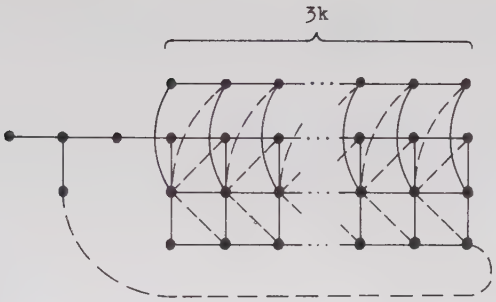
(1) $\alpha_{\tau_1}(\text{end } \tau_1)$, $\gamma_{\text{end } \tau_1}$




(2) $\alpha_{\tau_2}(\text{end } \tau_2)$, $\gamma_{\text{end } \tau_2}$




(3) $\alpha_{\varphi}(i)$, $\alpha_{i \circ \varphi}(\text{end } \varphi)$, $\alpha_{\text{end } \varphi \circ i \circ \psi}(\text{end } \psi)$


3k

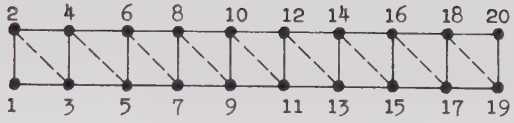
## A.2. Transformationen zu Kapitel 4.2

Wir geben hier die Transformationen der Dynkindiagramme der uni- und bimodularen Singularitäten zu ausgezeichneten Basen von [G3] in die Dynkindiagramme zu ausgezeichneten Basen von Abbildung 15 und 16 an. Wir listen diese Transformationen jeweils nur für die exzeptionellen Singularitäten der einzelnen Serien mit der größten Milnorzahl auf.

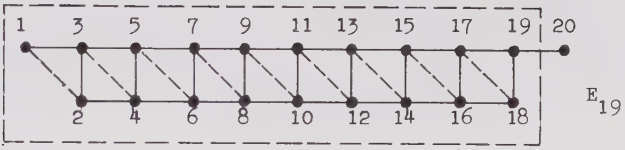
Die Umformung erfolgt in drei Stufen. In der ersten Stufe sind die aus einem Transformationsschritt resultierenden Diagramme immer Erweiterungen von Diagrammen nach [G3], die zu Singularitäten der entsprechenden Serien mit niedrigerer Milnorzahl gehören. Daher kann man auch gleichzeitig die Transformationen für die anderen Singularitäten der Serien ablesen. Die entsprechenden Diagramme sind jeweils gekennzeichnet und die zugehörigen Singularitäten angegeben. Für einige Singularitäten sind allerdings noch besondere Transformationen nötig. Sie sind unter 7) zusammengestellt. Das Vorgehen in den verschiedenen Fällen in Stufe (1) ist weitgehend analog. Die erste Stufe endet jeweils mit einem Diagramm, bei dem der von dem Ausgangsdiagramm übriggebliebene innere Untergraph das Dynkindiagramm einer einfach-elliptischen Singularität ($T_{2,3,6}$, $T_{2,4,4}$, $T_{3,3,3}$) ist.

Anschließend wird in einer zweiten Stufe nur dieser Untergraph umgeformt. Dabei sind die Transformationen von Serie zu Serie verschieden, auch wenn die Untergraphen übereinstimmen. In einer dritten Stufe wird dann schließlich das resultierende Diagramm auf die Form von Abbildung 16 gebracht. Diese Transformationen sind in allen Fällen analog und werden nur exemplarisch für den Fall $E_{20}$ durchgeführt.

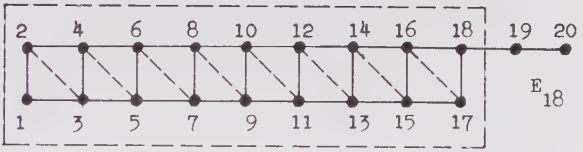
1) Transformationen für $E_{20}$



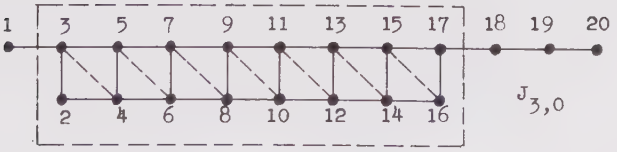

(1) a) $\alpha_{18}, \alpha_{17}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_1$



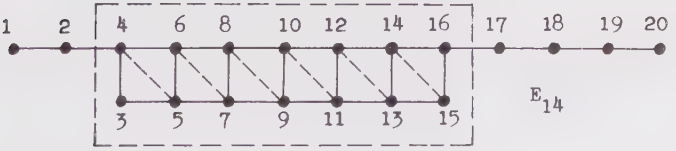

b) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots, \alpha_{15}, \alpha_{17}$



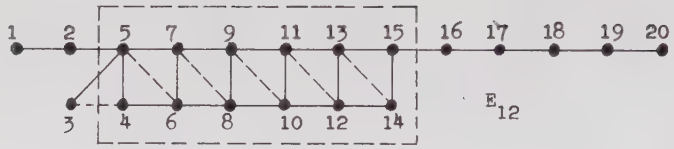

c) $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots, \alpha_{14}, \alpha_{16}$



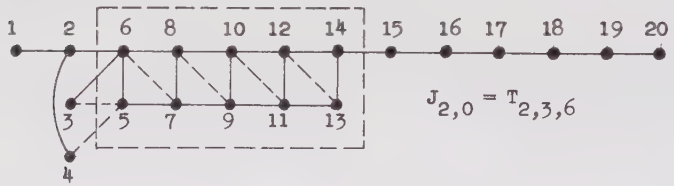

d) $\alpha_{15}, \alpha_{14}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$



e) $\alpha_{14}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_4, \alpha_3$

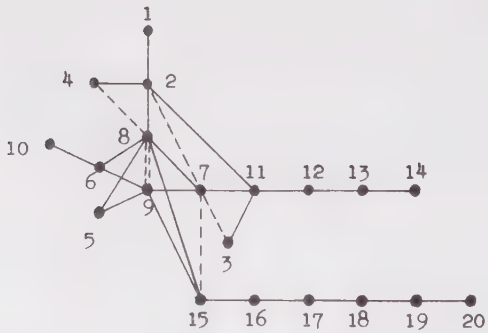



f) $\alpha_{13}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_5, \alpha_4$

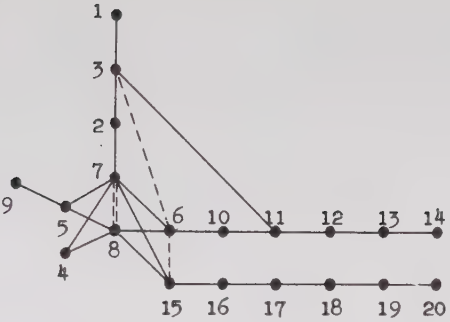



(2) (Umformung des eingerahmten Diagramms von $T_{2,3,6}$)

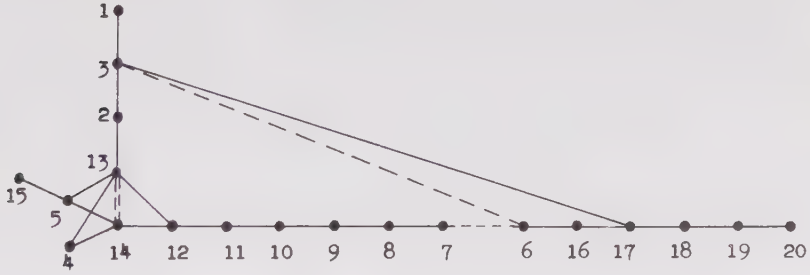
$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_8, \alpha_8, \beta_{10}, \alpha_{10}, \alpha_8, \beta_{10}, \alpha_8, \beta_{10}, \alpha_{11}, \beta_{11}, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{10}, \gamma_6, \gamma_7$



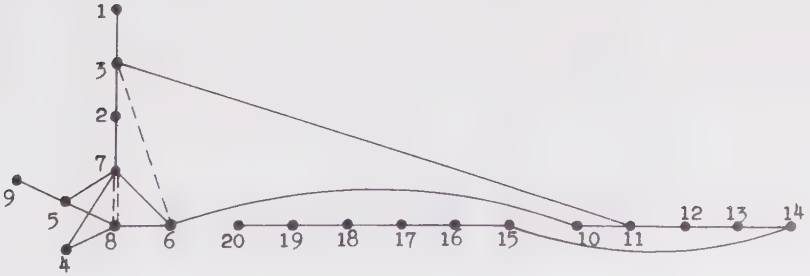

(3) a) $\beta_4, \beta_3, \gamma_2; \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6; \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$



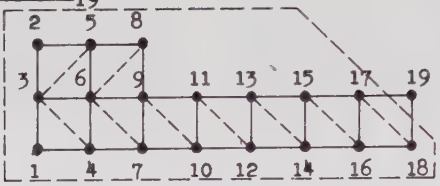

b) $\beta_{15}, \beta_{14}, \cdots, \beta_9, \beta_8; \beta_{16}, \beta_{15}, \cdots, \beta_{10}, \beta_9;$
$\beta_{17}, \beta_{16}, \cdots, \beta_{11}, \beta_{10}; \beta_{18}, \beta_{17}, \cdots, \beta_{12}, \beta_{11};$
$\beta_{19}, \beta_{18}, \cdots, \beta_{13}, \beta_{12}; \beta_{20}, \beta_{19}, \cdots, \beta_{14}, \beta_{13}$



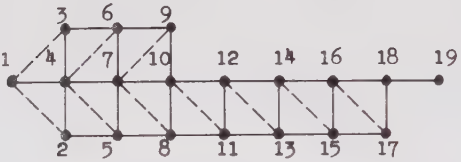

c) $\alpha_{11}, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_7, \alpha_6; \alpha_{12}, \alpha_{13}, \cdots, \alpha_{19}, \alpha_{20};$
$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{18}, \alpha_{19}; \alpha_{10}, \alpha_{11}, \cdots, \alpha_{17}, \alpha_{18};$
$\alpha_9, \alpha_{10}, \cdots, \alpha_{16}, \alpha_{17}; \alpha_8, \alpha_9, \cdots, \alpha_{15}, \alpha_{16};$
$\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9; \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{15}; \gamma_6, \gamma_{15}$



2) **Transformationen für $Z_{19}$**



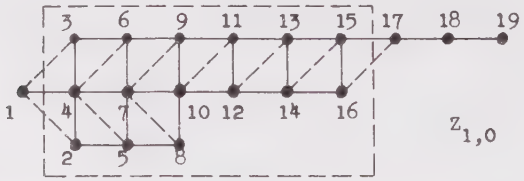

(1) a) $\alpha_{17}, \alpha_{16}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_1$



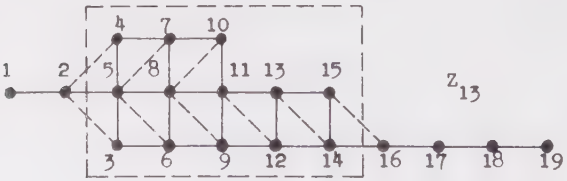

b) $\alpha_1, \alpha_2; \alpha_4, \alpha_5; \alpha_7, \alpha_8; \alpha_{10}, \alpha_{12}, \alpha_{14}, \alpha_{16}$

c) $\beta_3, \beta_4; \beta_6, \beta_7; \alpha_7, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \gamma_2;$

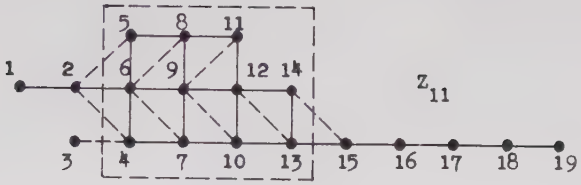
$\gamma_1, \gamma_4, \gamma_7, \gamma_{10}, \gamma_{12}, \gamma_{14}, \gamma_{16}$



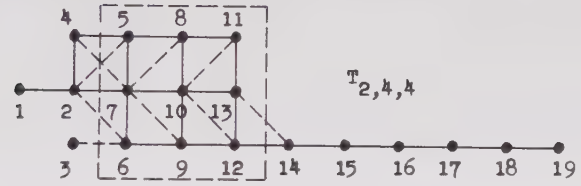

d) $\alpha_{15}, \alpha_{14}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1; \alpha_3, \alpha_6, \alpha_9$



e) $\alpha_{14}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_4, \alpha_3$

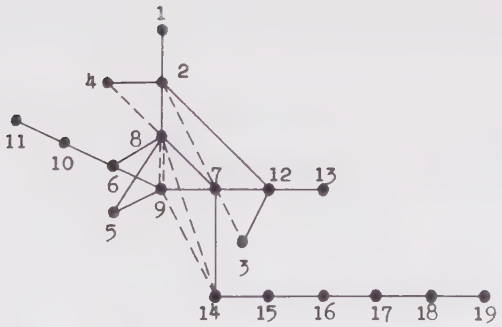



f) $\alpha_{13}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_5, \alpha_4; \alpha_3, \alpha_8, \alpha_{11}$

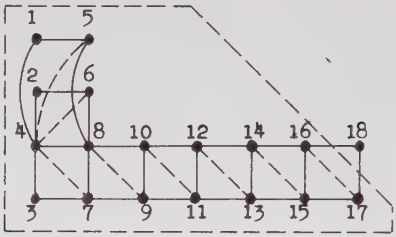



(2) (Umformung des eingerahmten Diagramms von $T_{2,4,4}$)

$\alpha_6, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_{12}, \alpha_{11}, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_7, \beta_9, \alpha_{12}, \alpha_{11}, \beta_6, \alpha_7, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_8, \beta_6, \beta_8, \beta_7, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}, \alpha_{11}, \beta_9, \beta_8, \alpha_6, \gamma_8, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$

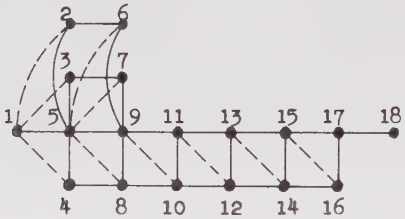


3) **Transformationen für $Q_{18}$**

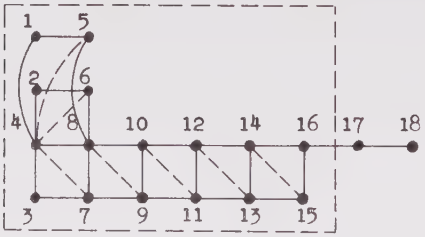



$Q_{17}$

(1) a) $\alpha_{16}, \alpha_{15}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_1$

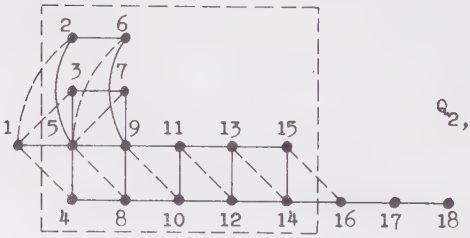



b) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7; \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}, \alpha_{15}$



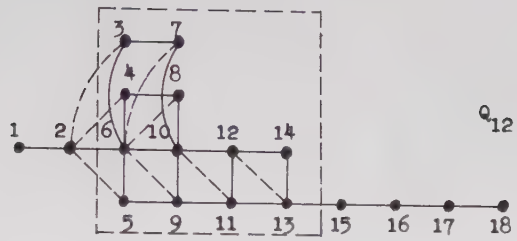

$Q_{16}$

c) $\alpha_6, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_2, \beta_3, \alpha_3, \beta_5, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3,$
$\gamma_3, \gamma_4, \gamma_1, \gamma_5, \gamma_9, \gamma_{11}, \gamma_{13}, \gamma_{15}$

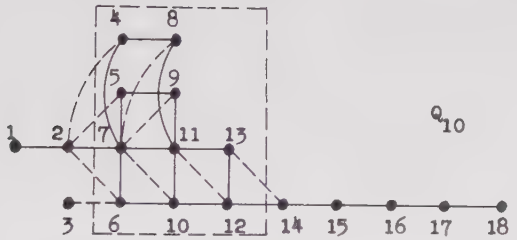



$Q_{2,0}$

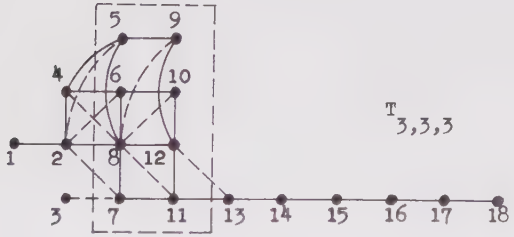
d) $\alpha_{14}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$




e) $\alpha_{13}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_4, \alpha_3$

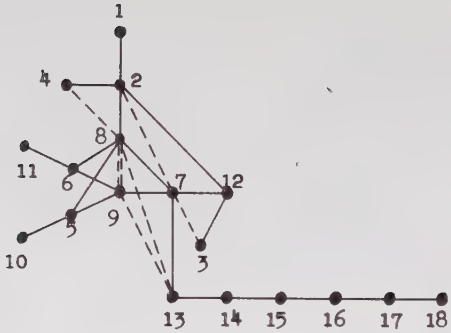



f) $\alpha_{12}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_5, \alpha_4$

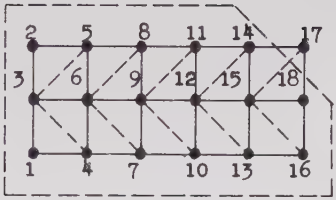



(2) (Umformung des eingerahmten Diagramms von $T_{3,3,3}$)

$\alpha_7, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_{11}, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_6, \alpha_5, \beta_9, \beta_8, \beta_9, \beta_7, \beta_8,$
$\alpha_6, \beta_6, \beta_8, \beta_7, \beta_9, \beta_8, \beta_{12}, \beta_{11}, \beta_{10}, \beta_9, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_{11}, \beta_9,$
$\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \gamma_8, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}$

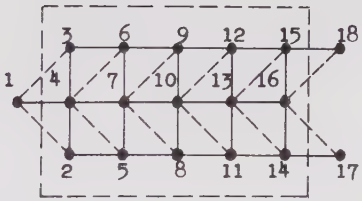

1
4
2
8
11
6
7
12
9
5
10
3
13
14
15
16
17
18

4) **Transformationen für $W_{18}$**



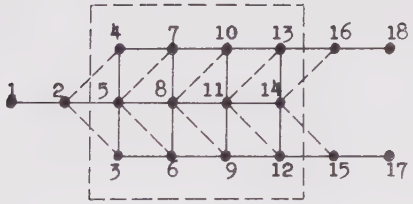

$W_{17}$

(1) a) $\beta_{18}, \beta_{17}; \beta_{15}, \beta_{14}; \beta_{12}, \beta_{11}; \beta_9, \beta_8; \beta_6, \beta_5; \beta_3, \beta_2$



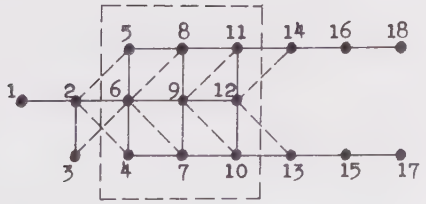

$W_{1,0}$

b) $\alpha_{15}, \alpha_{14}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$




$W_{12}$

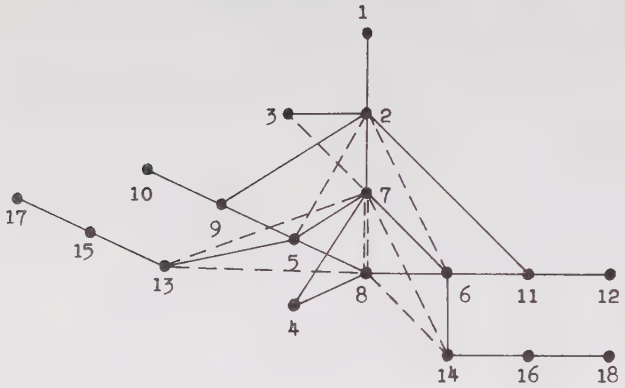
c) $\alpha_{13}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_4, \alpha_3$



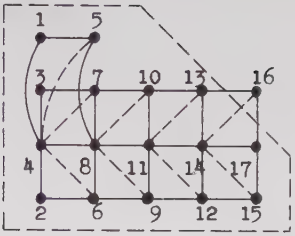

$T_{2,4,4}$

(2) (Umformung des eingerahmten Diagramms von $T_{2,4,4}$)

$\beta_{10}, \beta_{11}, \alpha_{11}, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_7, \beta_7, \alpha_8, \beta_8, \beta_{11}, \beta_{10}, \beta_9, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_7, \alpha_{11}, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_5, \alpha_4, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}$

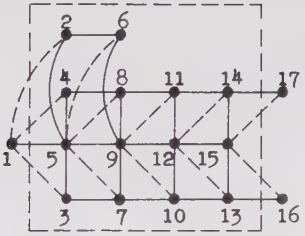


5) **Transformationen für $S_{17}$**



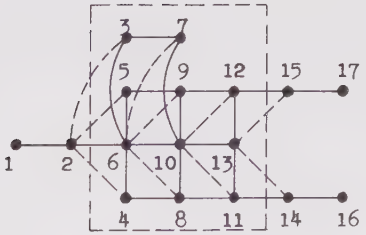

$S_{16}$

(1) a) $\beta_{17}$, $\beta_{16}$; $\beta_{14}$, $\beta_{13}$; $\beta_{11}$, $\beta_{10}$; $\beta_8$, $\beta_7$, $\beta_6$; $\beta_4$, $\beta_3$, $\beta_2$



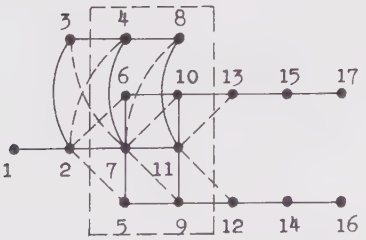

$S_{1,0}$

b) $\alpha_{14}$, $\alpha_{13}$, ... , $\alpha_2$, $\alpha_1$




$S_{11}$

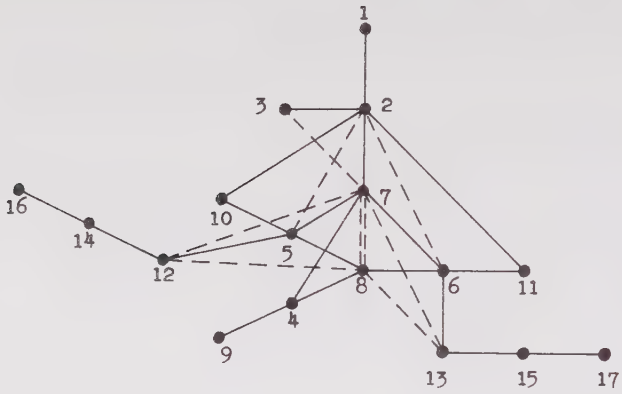
c) $\alpha_{12}$, $\alpha_{11}$, ... , $\alpha_4$, $\alpha_3$



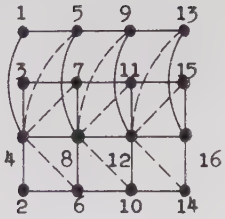

$T_{3,3,3}$

(2) (Umformung des eingerahmten Diagramms von $T_{3,3,3}$)

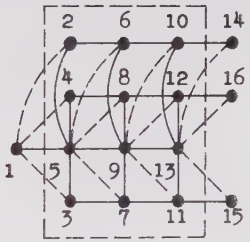
$\alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_4, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_7, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_7, \alpha_6,$
$\alpha_9, \alpha_7, \alpha_8, \beta_8, \beta_7, \alpha_5, \beta_5, \beta_7, \beta_6, \beta_8, \beta_7, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_5, \gamma_7,$
$\gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}$



6) **Transformationen für $U_{16}$**

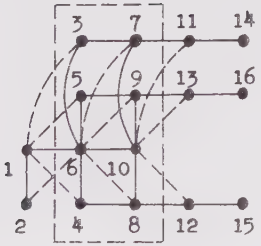



(1) a) $\beta_{16}, \beta_{15}, \beta_{14}; \beta_{12}, \beta_{11}, \beta_{10}; \beta_8, \beta_7, \beta_6; \beta_4, \beta_3, \beta_2$




$U_{12}$

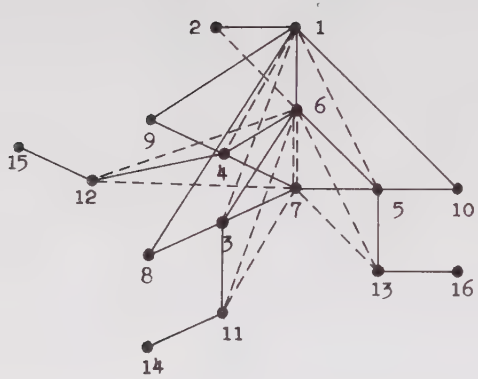
b) $\alpha_{12}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_3, \alpha_2$




$T_{3,3,3}$

(2) (Umformung des eingerahmten Diagramms von $T_{3,3,3}$)

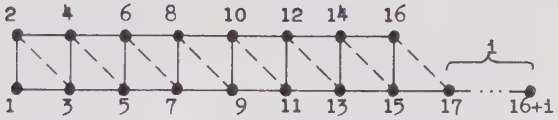
$\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_9, \alpha_8, \alpha_7, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7,$
$\alpha_8, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_7, \beta_5, \beta_4, \beta_6, \beta_5, \beta_7, \beta_6,$
$\gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}$


2
1
6
9
15
4
12
7
5
10
3
8
13
16
11
14

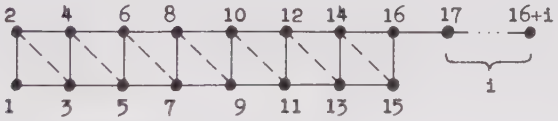
7) **Besondere Transformationen**

Für die Dynkindiagramme einiger Singularitäten sind noch besondere Transformationen nötig.

A) $J_{3,i}$, $i > 0$

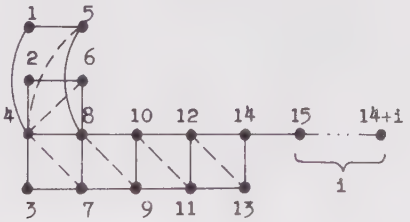



$\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{13}, \alpha_{15}, \gamma_1, \gamma_3, \cdots, \gamma_{13}, \gamma_{15}$

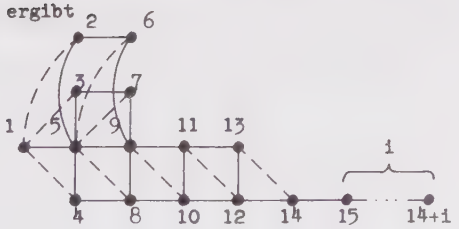



Weiter entsprechend (1)d) ff. von 1).

B) $Q_{2,i}$, $i > 0$



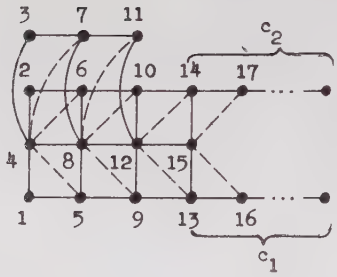

(1) c) von 3) ergibt




Weiter entsprechend (1) e) ff. von 3).

c) $U_{1,i}$, $i > 0$

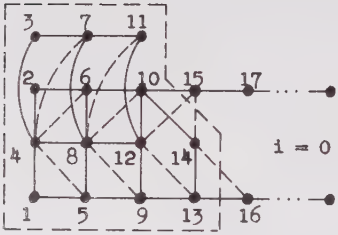
$i > 0$:



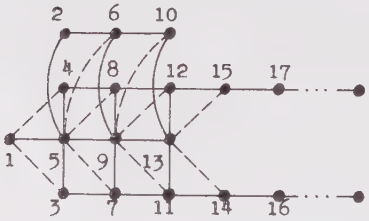

$i=2j$: $c_1=j+1$, $c_2=j$

$i=2j-1$: $c_1=j$, $c_2=j$

a) $\alpha_{14}$




b) $\alpha_{13}$, $\alpha_{12}$, ... , $\alpha_2$, $\alpha_1$; $\alpha_3$, $\alpha_2$; $\alpha_7$, $\alpha_6$; $\alpha_{11}$, $\alpha_{10}$




Weiter entsprechend (1)b) ff. von 6).

Literaturverzeichnis

[A1] Arnold, V.I.: Critical points of smooth functions and their normal forms. Uspekhi Mat. Nauk 30:5 (1975), 3-65 (engl. Übersetzung in Russian Math. Surveys)

[A2] Arnold, V.I.: Local normal forms of functions. Invent. math. 35 (1976), 87-109

[B1] Bourbaki, N.: Groupes et Algèbres de Lie, Ch. 4,5 et 6. Hermann, Paris, 1968

[B2] Brieskorn, E.: The Unfolding of Exceptional Singularities. Vortrag in Reinhardsbrunn, 1978 (erscheint demnächst)

[B3] Brieskorn, E.: Die Feinstruktur beschränkter symmetrischer Gebiete vom Typ IV. Nichtvervielfältigtes Manuskript zu einer Vortragsreihe am Math. Institut Bonn, 1978

[E1] Ebeling, W.: Graphentheoretische Eigenschaften der Dynkindiagramme von Singularitäten. Diplomarbeit, Bonn, 1977

[E2] Eichler, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, 2. Aufl., Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974

[G1] Gabrielov, A.M.: Dynkin diagrams of unimodal singularities. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya 8:3 (1974), 1-6 (engl. Übersetzung in Functional Analysis and its Applications)

[G2] Gabrielov, A.M.: Intersection matrices for certain singularities. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya 7:3 (1973), 18-32 (engl. Übersetzung in Functional Analysis and its Applications)

[G3] Gabrielov, A.M.: Polar curves and intersection matrices of singularities. Invent. math. 54 (1979), 15-22

[H1] Hirzebruch, F., Mayer, K.H.: O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. Lecture Notes in Mathematics 57, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968

[H2] Husein-Zade, S.M.: The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces. Uspekhi Mat. Nauk 32:2 (1977), 23-65 (engl. Übersetzung in Russian Math. Surveys)

[K1] Karras, U.: On pencils of curves and deformations of minimally elliptic singularities. Math. Ann. 247 (1980), 43-65

[K2] Kneser, M.: Quadratische Formen. Vorlesungsskript, Math. Institut der Universität Göttingen, 1974

[K3] Kneser, M.: Zur Theorie der Kristallgitter. Math. Ann. 127 (1954), 105-106

[K4] Kneser, M.: Von Spiegelungen erzeugte Untergruppen der orthogonalen Gruppen indefiniter Gitter (vorläufige Fassung)

[K5] Kulikov, V.S.: Degenerate elliptic curves and resolution of uni- and bimodal singularities. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya 9:1 (1975), 72-73 (engl. Übersetzung in Functional Analysis and its Applications)

[L1] Laufer, H.: Ambient deformations for one-dimensional exceptional sets. Invent. math. 55 (1979), 1-36

[M1] Millson, J.J.: On the first Betti number of a constant negatively

curved manifold. Ann. of Math. 104 (1976), 235-247

[M2] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies 61, Princeton University Press, Princeton, 1968

[M3] Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publ. Math. No. 9, I.H.E.S., Paris, 1961

[O1] O'Meara, O.T.: Introduction to quadratic forms. Third Corrected Printing, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973

[P1] Pinkham, H.: Groupe de monodromie des singularités unimodulaires exceptionelles. C. R. Acad. Sc. Paris 284 (1977), 1515-1518

[P2] Pinkham, H.: Singularités exceptionelles, la dualité étrange d'Arnold et les surfaces K-3. C. R. Acad. Sc. Paris 284 (1977), 615-618

[S1] Serre, J.P.: A course in arithmetic. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973

[V1] Vinberg, È.B.: Some arithmetical discrete groups in Lobačevskiĭ spaces. In: Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973). Oxford University Press, Bombay, 1975, 323-348

[W1] Wall, C.T.C.: On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms. Math. Ann. 147 (1962), 328-338

[W2] Wall, C.T.C.: On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms II. Journal f. d. Reine und Angew. Math. 213 (1963), 122-136

[W3] Watson, G.L.: Integral quadratic forms. Cambridge Tracts No. 51, Cambridge, 1960

## Lebenslauf

Am 5. 10. 1951 wurde ich in Bückeburg, Kreis Schaumburg-Lippe, in Niedersachsen als einziges Kind des Flugzeugbauingenieurs Friedrich-Wilhelm Ebeling und seiner Ehefrau Herta Ebeling geb. Hagens geboren. Meine frühe Kindheit verlebte ich in Kassel und Wilhelmshaven. Im April 1958 wurde ich in die evangelische Volksschule in Wilhelmshaven eingeschult. Nach einem Umzug nach Weilheim in Oberbayern besuchte ich ab 1959 weiter die dortige Volksschule, ab September 1962 den neusprachlichen Zweig des Gymnasiums Weilheim und nach einem erneuten Umzug schließlich ab April 1966 den neusprachlichen Zweig des altsprachlichen Staatlichen Gymnasiums in Siegburg. Dort bestand ich am 13. Mai 1971 das Abitur.

Vom Wintersemester 1971/72 an studierte ich Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. In dieser Fächerkombination legte ich hier am 29. 9. 1977 die Diplom-Hauptprüfung ab. Anschließend war ich ein Jahr lang als Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Bonn beschäftigt.

Seit Dezember 1977 wohne ich in Troisdorf. Am 25. Januar 1978 heiratete ich die jetzige Studienassessorin Bettina Ebeling geb. Zschoche.